А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

УЧЕБНИККА НЕПОЛНОЙЛ СРЕДНЕЙЛ И СРЕДНЕЙЛ ШКОЛАЛ

ЭНЗИМÄЙНЕ ЧУАСТИ

Каргосиздат — 1939 — Петрозаводск

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

ЭНЗИМÄЙНЕ ЧУАСТИ

УЧЕБНИККА
НЕПОЛНОЙН СРЕДНЁЙН
И СРЕДНЁЙН ШКОЛАН
6—8 КЛАССОЙЛ.

Утверди РСФСР-н Наркомпроса

А. Н. БАРСУКОВАН РЕДАКЦИЯЛ

ПЕРЕВОДИ КАРПЕДИНСТИТУТАН МАТЕМАТИКАН
КАФЕДРАН АССИСТЕНТА А. Ф. ИПАТОВ

Переводан утверди Карельскойн АССР-н Наркомпроса

КАРЕЛЬСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИЗДАТЕЛЬСТВА
ПЕТРОЗАВОДСК 1939

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

Учебник для неполной средней и средней школы

ЧАСТЬ 1

(на карельском языке)

ПРЕДИСЛОВИЯ 11-ста ИЗДАНИЯХ.

Энзимäйзес чуастис он изложитту кай се, мидä триэбуйях яльгимäйзет Наркомпросан программат 6-тта и 7-ттä опастунда вуозиэ варойн среднёйс школас.

Изложениян порядка соответствуйччоу программал, пайчи алгебраическолойн дробилойн раздиэлуа. Чтобы изложенияс олис единства, тäмä раздиэла он панду ўхтех главах, силлой куй, прсграммуа мўöте тäмä материюала проходих чуастил 6-на, чуастил 7-нä опастунда вуодена. Преподавателя кебиэсти вой эройттуа нäмä чуастит.

Тäс уувес алгебран учебникан изданияс он кохеннетту кай замиэтитут опечаткат, а муга же и неточностит и киэлен кархаккуот; эрäхис сиёйс он лиаитту пиэнет вставкайзет и муутоксет текстан пареммин эллендäмистä варойн.

Он лизäттў упражнениёй (энзимäйзес чуастис нийдä оли 200, нўгöй он 279, и книйган лопус он аннетту отвиэтат кайкких упражнениёйх.

Ленинград, октября 1934 в. *А. Киселев.*

ЭНЗИМАЙНЕ ОТДИЭЛА.

АЛГУ ПОНЯТИЯТ.

I. Алгебраической знакоположения.

1. Буквиэн употребляйнда. а) *Числойн общолойн свойствиэн выражайндах нäхте.* Пидäккäх мейл лӯхӯӧсти выразиэ кирьюттаен, что кахтен числан произведения эй мууту, если мӯӧ ваехтамма множимойн и множителян сият. Силлой, обознуаччихуо ӯхтен числан a-л, а тойзен b-л мӯӧ воймма кирьюттуа равенстван: $a \times b = b \times a$, или лӯхемби: $ab = ba$, если совимма кайкекси айгуа, что если кахтен риннаккай кирьютеттулойн буквиэн вӑлил эй оле ни миттӯйстӑ знуаккуа, то тäмӑ знуаччиу, что нийен вӑлил подразумевайях умножинда знуаккуа. Ненга поступайях айнос, если тахтотах выразиэ, что эрäс свойства он эй миттӯйзил-тахто эри числойл, а кайкен мойзил числойл.

Числойн обознуаччимиста варойн обыкновенно употребляйях латинскойн (или французскойн) алфавитан буквиэ.

б) *Правилан лӯхӯбсти выражайндуа варойн, кудаман авул вой решшиэ задуаччой*, ӯхтен мойзиэн условиейн ке, но эрисууруйзиэн аннеттулойн числойн ке.

Саномма, примиэракси, мӯӧ решиммӑ задуаччуа:

лӧӯдиä 3% числас 520.

Силлой рассуждайчемма ненга:

1% миттӯйзес-тахто числас составляйччоу $\frac{1}{100}$ тӑс числас; следовательно:

1% числас 520 составляйччоу $\frac{520}{100} = 5{,}2$;

3% " " " $\frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6$.

Энӑммäн тӑмäн луадуйзен задуачан решшихӯӧ, мӯӧ замиэтимма, что миттӯӧн-тахто числан процентойн лӧӯдӑмистӑ варойн пидäӯ вай ягуа тӑмӑ числа 100 и результатта умножиэ процентойн лувул. Решиммӑ задуачан тӑмӑн мойзес общойс видас:

лӧӱдиӑ $p\%$ числас a.

Задуачан решиммӑ ненга:

$$1\% \text{ числас } a \text{ составляйччоу } \frac{a}{100},$$

$$p\% \quad \text{“} \quad \text{“} \text{ составляйях } \frac{a}{100} \times p.$$

Эчиттӑвӑн числан обознуаччихуо буквал x, мӱӧ воймма кирьюттуа равенстван:

$$x = \frac{a}{100} \times p,$$

кудамас сельгиэх нӑгӱӱ, куй войби лӧӱдиӑ процентат любойс аннетус числас.

Отамма виэ примиэран. Арифметикас дробилойн умножинда правилан мӱӧ формулируйчемма ненга: чтобы умножиэ дроби дробил, пилӑӱ эриже умножиэ нийен числителят и знаменателят и энзимӓйне произведения ягуа тойзел произведениял. Буквеннолойн обозначениейн авул тӑмӑн правилан мӱӧ воймма выразиэ ӱлен лӱхӱӧсти. Именно, обознуачимма энзимӓйзен дробин числителян a-н каути, знаменателян b-н каути, а тойста дробиэ варойн соответственно c-н и d-н каути, мӱӧ воймма кирьюттуа:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Эй оле югиэ нӑхтӑ, что тӑмӑ кирьютус андау кайкен мойзиэн дробилойн умножиндан общойн правилан, сентӑх куй букват войях олла любойлойна числойна.

Юури ненга же дробилойн ягамизен правилах нӑхте мӱӧ суамма кирьютуксен:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ёга равенствуа или неравенствуа, кудама буквиэн и действиейн знуакойн авул выражайччоу миттӱйстӑ-тахто соотношениюа числойн вӓлил, санотах формулакси.

Туомма примиэракси эрӓхиэ формулой.

Если прямоугольникан основаниян и коргевуон миӓриӓммӓ ӱхтел и сил же линейнойл единицал и основаниях нӑхте суамма числан b, а коргевуох нӑхте числан h, то тӑмӑн прямоугольникан площади s, выразитту соответствующолойс квадратнолойс единицойс, определяйчех формулал $s = bh$. Нийл же обозначениейл треугольникан площадиэ варойн суамма формулан:

$$s = \frac{1}{2} bh.$$

Физикас тийяммӑ, что миттӳйзен-тахто веществан удельнойн виэсан лӧӳдӓмистӑ варойн пидӑӳ тӑмӓн веществан аннетун количестван виэсса ягуа сен объёмал. Тиэлан виэсан (граммойс) обознуаччихуо p-н каути, сен объёман (кубическолойс сантиметройс) v-н каути и удельнойн виэсан d-н каути, мӳӧ воймма туувуон правилан удельнойн виэсан лӧӳдӓмистӑ варойн выразиэ формулал:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Алгебраической выражения. Если буквил (или буквил и цифройл) обознуачиттулой эрӓхиэ числой он ӳхтӳтеттӳ кескенӓх знуакойн авул, кудамат озутетах, миттӳйзет действият и миттӳйзес порядкас пидӑӳ луадиэ числойн ке, то тӑмӓн мойста обозначениюа санотах *алгебраическойкси выраженияксu*.

Сен мойзет оллах, примиэракси, выраженият: $\frac{a}{100} \times p$; ab; $2x+1$.

Лӳхеннӳксен тӑх мӳӧ „алгебраическойн выражениян“ сиях рубиэмма пуаксух саномах просто „выражения“.

Чётайя миттӳйне-тахто выражения буквиэн аннеттулой чисоловолой значенийёй варойн — знуаччиу панна сих буквиэн сиях нӓмӑ числовойт значенияt и луадиэ кай выражениялс озутетут действият; тӓмӓн яльгех получиттуо числуа санотах алгебраическойн выражениян *числовойкси величинакси* буквиэн аннеттулой числоволой значенийёй варойн. Муга, выражениян

$\frac{a}{100} \times p$ числовой величина он:

$$\frac{520}{100} \times 3 = 5{,}2 \times 3 = 15{,}6, \quad \text{если } p = 3 \text{ и } a = 520.$$

3. Алгебрас качоттават действият оллах: *лизиӓндӓ*, *пуоленнанда*, *умножинда*, *юанда*, *степених ностанда* и *юурен отанда*. Мит оллах энзимӓйзет неллӑ действиюа, тийяммӑ арифметикас. Вийес действия, степених ностанда, он умножениян частной случай, конза умножитах кескенӓх эрӓхиэ ӳхтен суруйзиэ сомножителёй. Тӓмӓн мойзиэн сомножителёйн произведениюа санотах *степеникси*; а нийен сомножителёйн лугуо — *степенин озуттаякси*. Степених ностеттавуа числуа санотах *степенин основанияксu*. Если миттӳйне-тахто числа отетах сомножителяна 2 кердуа, то произведениюа санотах *тойзекси степеникси;* если миттӳйне-тахто числа отетах сомножителяна 3 кердуа, то произведениюа санотах тӓмӓн числан *колманнекси степеникси* и м. и. Муга, числан 5 тойне степени он произведения 5×5 с. о. 25, числан $\frac{1}{2}$ колмас степени он произведения $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, с. о. $\frac{1}{8}$. Числан *энзимӓйзекси степеникси* санотах иччиэдӓх тӑдӑ числуа.

Тойста степениэ тойзин санотах виэ *квадратакси*, а колматта степениэ — *кубакси*. Тӓмӓн мойзет названият он аннетту сентӑх, что произведения $a \times a$ выражайччоу (квадратнолойс единицойс) квадратан площадиэ сторонан ке a линейнойда единицуа, а произведения $a \times a \times a$ выражайччоу (кубическолойс единицойс) кубан объёмуа сӓрвен ке a линейнойда единицуа.

Юурен отандах нӓх мӳӧ пока эммӓ рубиэ пагиземах, сентӑх куй тӑдӑ действиюа алгебран аллус эй качелла.

4. **Алгебрас употребляйдават знуакат.** Энзимӓйзен неллӓн действиян обознуаччимиста варойн алгебрас употребляйях нийдӓ же знуаккой, куй и арифметикас, вай умножинда знуаккуа, куй мӳӧ ё санойммa обыкновенно эй кирьютета, если ӳкси или молеммат сомножителят оллах обознуачитут буквил. Примиэракси $a \times b$ (или $a \cdot b$ сиях) кирьютетах просто ab и $3 \times a$ (или $3 \cdot a$) сиях кирьютетах $3a$. Юаннан знуаккана применяйях, безразлично, или двоеточиюа „:“ или горизонтальнойда чертуа; муга, выраженият $a:b$ и $\frac{a}{b}$ обозначайях ӳхтӓ и самуа, а именно, что числа a ягаудуу числал b.

Степених ностандуа лӳхӳсти он приймиттӳ выражайя ненга: кирьютетах числа, кудама пидӓӳ оттуа сомножителяна (степенин основания), а сен пиӓл, ойгиэл пуолел пӓй, паннах тойне числа (степенин озуттая), кудама озуттау, ӓйян-го кердуа степених ностеттава числа должен олла повторитту сомножителяна. Муга, 3^4 (лугиэтах *колме неллӓннес степенис*) заменяйччоу подробнойда обозначениюа:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Если числал эй оле ни миттӳйстӓ степенин озуттаюа, то войби подразумевайя, что сен озуттаяна он единица; примиэракси, a означайччоу ӳхтӓ и самуа числуа, куй и a^1.

Кахтен миттӳйзен-тахто выражениян ӳхтенсуурус обозначайях знуакал $=$, а эрисуурус знуакал $>$, кудамас углан терӓвӓ пуоли пидӓӳ азеттуа пиэнембӓх числах пӓй. Примиэракси, если он кирьютетту:

$$5+2=7 \quad 5+2<10 \quad 5+2>6,$$

то тӓмӓ знуаччиу: $5+2$ он 7; $5+2$ он вӓхемби 10; $5+2$ он энӓмби 6.

5. **Действиёйн порядка.** Порядках нӓх, кудамас пидӓӳ луадиэ алгебраическойс выражениях озутетут действият, совиттих: **энзимӓй луадиэ коргиэмман порядкан действият, с. о. степених ностанда и юурен отанда, сен яльгех умножинда и юанда и, яльгимӓйзекси, лизиӓндӓ и пуоленнанда.**

Муга, если он кирьютетту выражения: $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$, то сидӓ чётайес энзимäй пидäў луадиэ степених ностанда (числа a нос-туа квадраттах и числа b кубах), сен яльгех умножинда и юан-да (3 умножиэ a^2-л и суаду результатта b-л; b^3 ягуа c) и, яльги-мäйзекси, пуоленнанда и лизиäндä ($3a^2b$-с пуолендуа $\frac{b^3}{c}$ и резуль-таттах лизäтä d).

Конза задуачан условият триэбуйях вäльтўмистä тäс дейст-виёйн порядкас, то употребляйях скобкиэ. Скобкат озутетах, что действият скобкис олиёйн числойн ке пидäў луадиэ энне тойзиэ. Примиэракси выражeният:

$$5+7\cdot 2 \text{ и } (5+7)\cdot 2$$

означайях эй ўхтä и самуа. Энзимäйзес случайс 7 пидäў умно-жиэ 2-л и результатта лизäтä 5-х (суамма 19). Тойзес случайс энзимäй пидäў лизäтä 5 и 7 и результатта умножиэ 2-л (суам-ма 24).

Юури муга же, если он кирьютетту:

$$(a+b)c-d,$$

то тäмä знуаччиу, что энзимäй пидäў лизäтä a и b, сен яльгех суаду числа умножиэ c-л и сийт, ми тулоу, пуолендуа d.

Конза пидäў панна скобких сен мойне выражения, кудамас оллах омат скобкат, то уузил скобкил аннетах миттўйне-тахто тойне форма. Примиэракси, выражения:

$$a\{b-[c+(d-e)]\}$$

означайччоу, что d-с пидäў пуолендуа e, суаду разности лизäтä c-х, суаду сумма пуолендуа b-с и тäмä разности умножиэ a-л.

Скобкил обыкновенно аннетах тäмäн мойзет названият: круг-лойт скобкат ( ), квадратнойт, или катконайзет, скобкат [ ], фи-гурнойт скобкат { }.

Конза выраженияс он энäмби скобкиэ, то обычно энзимäй луаитах действият круглолойс скобкис олиёйн числойн ке, сен яльгех квадратнолойс скобкис олиёйн числойн ке и яль-гимäйзекси, фигурнолойс. Скобкил озутеттулой действиёй луадиес, мўö хäвитäммä или, куй санотах, „авуамма“ скобкат: Муга, выраженияс:

$$5\cdot\{24-2\cdot[10+2\cdot(6-2)-3\cdot(5-2)]\}.$$

энзимäй авуамма круглойт скобкат:

$$5\cdot\{24-2\cdot[10+2\cdot 4-3\cdot 3]\}.$$

Сен яльгех авуамма квадратнойт скобкат:

$$5\cdot\{24-2\cdot 9\}.$$

Яльгимäй, авуамма фигурнойт скобкат:

$$5\cdot 6=30.$$

Упражненият.

1. Квадратан сторона он a *м*; выразиэ сен периметра, сен яльгех площади.

2. Если кубан сäрви он m *см*, то куй выражайяхес сен пинда, сен об'ёма?

3. Прямоугольникан основания он x *м*, а коргевус он d *м* лÿхемЗи основанию̈а. Выразиэ сен площади.

4. Эрäхäс каксизнуаккахизес числас он x кÿммендä и y простойда единицуа. Äйя го кайккиэдах единицуа он тäс числас?

5. Колмезнуаккахизес числас он a садуа, b кÿммендä и c простойда единицуа. Миттÿйзел формулал войби выразиэ тäс числас олият кай единицат?

6. Он севойтетту 2 сортуа чуаюо: энзимäйстä сортуа он отетту a *кг*, тойста b *кг*. Килограмма энзимäйстä сортуа максау m руб., килограмма тойста сортуа n руб. Выразиэ севойтуксен ÿхтен килограмман хинда.

7. Озуттуа алгебрас приймиттÿлöйн знуакойн авул: 1) числойн x и y квадратойн сумма; 2) нийен же числойн сумман квадратта; 3) нийен числойн квадратойн произведения; 4) нийен произведенияn квадратта; 5) числойн a и b сумман произведения нийен разностил; 6) частной, получитту числойн m и n сумман юандас разностил (яльгимäйне выразиэ кахтел способал, с. о.: знуакан авул и чертан авул).

8. Чëтайя выражeният:

1) $(a+b)\,c$; 2) $a+bc$; 3) $(a+b)\,a-b$;

4) $(a+b)\,(a-b)$; 5) $(a+b):c$; 6) $\dfrac{a+b}{b-c}$

если $a=20$, $b=8$ и $c=3$.

9. Кирьюттуа выражения, кудама ройхес, если произведениях $3ab$ a-н сиях панна сумма $x+y$; b-н сиях разности $x-y$.

Историческойт сведенният.

Сана „алгебра“ он арабскойда происхождению̈а. Тäл санал заводих арабскойн учëнойн **А л ь х в а р и з м а н** (820 в.) кирьюттаман математическойн трудан заглавия.

Европас тäдä сануа энзимäйзен керран употреби заглавияна омах математическойх трудах итальянской математикка **Б о м б е л л и** 1572 вуодена, а сен яльгех, сил руветтих пользуймахес кай математикат.

Тамäн санан значения сельгенöÿ главан пройдихуо уравнениейх нäх.

Числойн обозначайндах нäхте букват энзимäйзекси отти французской математикка Виета 1591 вуодена. Тäмäн яльгех буквеннолойл обозначениейл особенно левиэсти пользуйччих знаменитой французской философа и математикка **Р е н е Д е к а р т** (1596—1650 вв.).

Нÿгöйзел айял алгебрас употребляйттават знуакат оллах отетут употреблениях эри математикойл эри айгойна. Энне действнейн обозначайндах нäхте употребляйдих туккунайста сануа или даже фразуа. Тернäмбäх чëтайччемизен практической потребности кäски куотелла различнолойн энäммäл употребляйттавиэн санойн лÿхендäмистä сих суате, куни, яльгимäй, нäмä санат или нийен лÿхеннÿксет эй ваехтутту специальнолойл знуакойл. Озутамма энäммäл употребляйттавиэн знуакойн появляйченнан айян.

Лизäннäн и пуоленнаннан знуакат „$+$“ и „$-$“ отти немецкой математикка **В и д м а н** 1489 в. Энне хäндä нет ваставуттих виэ великойн итальянскойн художникан **Л е о н а р д о-да- В и н ч и н** рукописилойс.

Ухтенсуоруон обозначчимиста варойн английской алгебраиста **Р е к о р д** отти (1557 в.) знуакан „$=$“, „ибо, — куй кирьютти хäн, — ни миттÿöт кaкси предмиэттуа эй войя олла энäммäл ÿхтен суоруот, куй кaкси ÿхтен питкÿттä параллельнойда линию̈а“. Тойне английской математикка **Х е р р и о т** отти знуакат „$>$“ и „$<$“ (1631 в.) и точкан умножинда знуаккана.

Знаменитой немецкой математикка **Л е й б н и ц** (1694 в.) энзи керран отти юаннан обозначайндах нäхте знуакан „ : “, кудамуа энне обозначайдих чертал.

Скобкат (), [ ] и { } энзи кердуа ваставутах фламандскойн математикан Жираран (1629 в.) трудис.

Эй кай нӑмӑ внуакат керрал мӓнчӳ всеобщойх употреблениях. Эрӓхӓт математикат яткеттих частично пользуйчендуа виэ ванхойл обозначениейл. Нӳгӧйзес видас алгебраическойн символикан вой чётайя лопуллизести азеттунуона вай XVIII столетиян лопус. Тӓс отношенияс ӳлен суури влияния окажиттих великойн английскойн учёнойн Исаак Ньютонан (1642—1727 вв.) сочинениит.

II. Энзимӓйзиэи неллӓн арифметическолойи действиейн свойстват.

Мустойтамма ё арифметикас тийюстетут лизиӓннӓн, пуолендамизен, умножениян и юаннан главнейшойт свойстват, сентӓх куй нийдӓ свойствиэ пуаксух пидӓӳ используйя и алгебрас.

6. Лизиӓндӓ. а) **Сумма эй мууту лизӓттӓвиэн сиёйн ваехтандас** (лизиӓннӓн переместительной закона). Муга:

$$3+8=8+3;\quad 5+2+4=2+5+4=4+2+5.$$

Вообще:

$$a+b=b+a;\quad a+b+c+\ldots=b+a+c+\ldots=c+a+b+\ldots$$

Точкиэн риӓдӳ озуттау, что лизӓттӓвиэ войби олла и энӓмби колмиэ.

б) **Монен лизӓттӓвӓн сумма эй мууту, если миттӳӧт-тахто нийлӧйс ваехтуа нийен суммал** (лизиӓннӓн сочетательной закона). Муга:

$$3+5+7=3+(5+7)=3+12=15;$$
$$4+7+11+6+5=7+(4+5)+(11+6)=7+9+17=33.$$

Вообще:

$$a+b+c=a(b+c)=b+(a+c)$$ и м. и.

Тойчи тӓмӓ закона выражайях ненга: **лизӓттӓвӓт войби ӳхтӳтеллӓ миттӳмих-тахто группих.**

в) **Чтобы миттӳӧх-тахто числах лизӓтӓ монен числан сумма, войби лизӓтӓ ёга лизӓттӓвӓн эриже тойне тойзен яльгех.** Муга:

$$5+(7+3)=(5+7)+3=12+3=15.$$

Вообще:

$$a+(b+c+d+\ldots)=a+b+c+d+\ldots$$

7. Пуоленнанда. а) **Чтобы миттӳйзес-тахто числас пуолендуа монен числан сумма, войби пуолендуа ёга лизӓттӓвӓн эриже тойне тойзен яльгех.** Муга:

$$20-(5+8)=(20-5)-8=15-8=7.$$

Вообще:

$$a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$$

б) **Чтобы лизäтä кахтеи чиćлаи разиости, войби лизäтä пуолеииеттаваи и сеи яльгех пуолеидуа пуолеидаян.** Муга:

$$8+(11-5)=8+11-5=14.$$

Вообще:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

в) **Чтобы пуолеидуа разиости, войби лизäтä эизимäй пуолеидаяи и сеи яльгех пуолендуа пуолеииеттаваи.** Муга:

$$18-(9-5)=18+5-9=14.$$

Вообще:

$$a-(b-c)=a+b-c.$$

8. Умиожиида. а) **Произведеиия эй мууту сомиожителейн сиейи ваехтаидас** (умножениян переместительной закона). Муга:

$$4\cdot5=5\cdot4;\ 3\cdot2\cdot5=2\cdot3\cdot5=5\cdot3\cdot2.$$

Вообще:

$$ab=ba;\ abc\ldots=bac\ldots=cba\ldots$$

б) **Моиеи сомиожителяи произведеиия эй мууту, если миттўйзет-тахто иийлöйс ваехтуа иийеи произведеиял** (умножениян сочетательной закона). Муга:

$$7\cdot3\cdot5=5\cdot(3\cdot7)=5\cdot21=105.$$

Вообще:

$$abc=a(bc)=b(ac)\ \text{и м. и.}$$

в) **Чтобы миттўйие-тахто числа умиожиэ монен сомиожителян произведеииял, войби тäмäи числаи умиожиэ эизимäйзел сомиожителял, суаду результатта умиожиэ тойзел сомножителял** и м. и. Муга:

$$3\cdot(5\cdot4)=(3\cdot5)\cdot4=15\cdot4=60.$$

Вообще:

$$a(bcd\ldots)=(ab)cd\ldots$$

г) **Чтобы моиеи числаи произведеиия умиожиэ миттўйзел-тахто числал, войби умиожиэ тäл числал ўхтен сомиожителейс, яттäен тойзет мууттаматта.** Муга:

$$(3\cdot2\cdot5)\cdot3=(3\cdot3)\cdot2\cdot5=3\cdot(2\cdot3)\cdot5=3\cdot2\cdot(5\cdot3).$$

Вообще:

$$(abc\ldots)m=(am)bc\ldots=a(bm)c\ldots\ \text{и м. и.}$$

д) **Чтобы умиожиэ сумма миттўйзел-тахто числал, войби умиожиэ тäл числал ёга лизäттäвäн и суавут результатат лизäтä ўхтех.** Муга:

$$(5+3)\cdot7=5\cdot7+3\cdot7.$$

Вообще:

$$(a+b+c+\ldots)m=am+bm+cm+\ldots$$

Умножениян переместительнойн законан основаниял тăмăн свойстван войби выразиэ ненга: чтобы миттўйне-тахто числа умножиэ монен числан суммал, войби тăмăн числан умножиэ ёга лизăттăвăл эриже и суавут результатат лизăтă ўхтех. Муга:

$$5\cdot(4+6)=5\cdot4+5\cdot6.$$

Вообще:

$$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots$$

Тăдă свойствуа санотах умножениян *распределительнойкси* законакси, сентăх куй сумман ке луаиттава умножения *„распределяйчех“* ёга лизăттăвăх эриже.

е) Распределительнойда законуа войби применяйя и разностих. Муга:

$$(8-5)\cdot4=8\cdot4-5\cdot4;\quad 7\cdot(9-6)=7\cdot9-7\cdot6.$$

Вообще:

$$(a-b)c=ac-bc;\ a(b-c)=ab-ac,$$

с. о. **чтобы умножиэ разности миттўйзел-тахто числал, войби умножиэ тăл числал эриже пуоленнеттаван и пуолендаян и энзимăйзес результатас пуолендуа тойне; чтобы миттўйне-тахто числа умножиэ разностил, войби тăмăн числан умножиэ эриже пуоленнеттавал и пуолендаял и энзимăйзес результатас пуолендуа тойне.**

9. Юанда. а) **Чтобы ягуа сумма миттўйзел-тахто числал, войби ягуа тăл числал ёга лизăттăвăн эриже и суавут результатат лизăтă ўхтех.**

$$\frac{30+12+5}{3}=\frac{30}{3}+\frac{12}{3}+\frac{5}{3}=10+4+1\frac{2}{3}.$$

Вообще:

$$\frac{a+b+c+\ldots}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\ldots$$

б) **Чтобы ягуа разности миттўйзел-тахто числал, войби тăл числал ягуа эриже пуоленнеттаван и пуолендаян и энзимăйзес результатас пуолендуа тойне:**

$$\frac{(20-8)}{5}=\frac{20}{5}-\frac{8}{5}=4-1\frac{3}{5}.$$

Вообще:

$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

в) **Чтобы ягуа монен сомножителян произведения миттўйзел-тахто числал, войби тăл числал ягуа ўхтен сомножителёйс, яттăен тойзет мууттаматта.**

$$(40\cdot12\cdot8):4=10\cdot12\cdot8=40\cdot3\cdot8=40\cdot12\cdot2.$$

Вообще:

$$(abc\ldots):m=(a:m)bc\ldots=a(b:m)c\ldots \text{ и м. и.}$$

г) **Чтобы миттӳйне-тахто числа ягуа монеи числаи произведенинял, войби тāмāн числан ягуа энзимāйзел сомножителял, суавун результатан ягуа тойзел сомножителял и м. и.**

$$120:(2\cdot5\cdot3)=[(120:2):5]:3\quad(60:5):3=12:3=4.$$

Вообще:

$$a:(bcd\ldots)=[(a:b):c]:d\ldots \text{ и м. и.}$$

д) Озутамма виэ следующойн юаннан свойстван:

Если юаттаван и ягаян умножимма (или юамма) **ӯхтел и самал числал, то частной эй мууту.**

Объяснимма тāмāн свойстван кахтел примиэрал:

$$1)\ 8:3=\frac{8}{3},$$

умножимма юаттаван и ягаян, саномма, 5-л, силлой суамма уувен частнойн:

$$(8\cdot5):(3\cdot5)=\frac{40}{15},$$

кудама дробин сократтихуо 5-л андау эндизен частнойн $\frac{8}{3}$.

$$2)\ \frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3\cdot6}{4\cdot5}.$$

Умножимма юаттаван и ягаян, саномма, $\frac{2}{7}$; силлой суамма уувен частнойн:

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right):\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}\right),$$

кудама дробилойн умножениян и юаннан правилой мӯōте он

$$\frac{3\cdot2}{4\cdot7}:\frac{5\cdot2}{6\cdot7}=\frac{3\cdot2\cdot(6\cdot7)}{4\cdot7\cdot(5\cdot2)}=\frac{3\cdot2\cdot6\cdot7}{4\cdot7\cdot5\cdot2} \text{ суурус,}$$

ми 2-л и 7-л сократтихуо андау эндизен частнойн $\frac{3\cdot6}{4\cdot5}$.

Вообще, олдахас a, b и m миттӳōт-тахто числат, айнос $(am):(bm)=a:b$, мин войби кирьюттуа и ненга:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$

Если частной эй мууту юаттаван и ягаян умножиндас ӯхтел и самал числал, то сё эй мууту и юаттаван и ягаян ягамизес ӯхтел и самал числал, сентāх куй ягамине миттӳйзел-тахто числал он равносильной умножиндал киāннетӯл числал.

10. Действиейн свойствиэн применяйнда. Озутеттулой действиейн свойствиэ войби пуаксух используйя алгебраическолойн выражениейн преобразуйннас; примиэракси:

а) $a+b+a+2+b+a+8$. Пользуйччиудуен лизиäннâн сочетательнойл свойствал, группируйчемма лизäттâвäт ненга:

$$(a+a+a)+(b+b)+(2+8).$$

Тâмâн сумман лӯхемби войби кирьюттуа ненга:

$$a3+b2+10,$$

мин умножениян переместительнойн свойстван основаниял, войби кирьюттуа ненга:

$$3a+2b+10.$$

б) $a+(b+a)$. Чтобы числах a лизäтâ сумма $(b+a)$, войби a-x лизäтâ b и сен яльгех виэ a; суамма $a+b+a$. Группируйчемма лизäттâвäт ненга:

$$(a+a)+b.$$

Тâмâн сумман войби кирьюттуа лӯхемби ненга:

$$a\cdot 2+b, \text{ или } 2a+b.$$

в) $a\cdot(3x^2a)$. Чтобы числа a умножиэ произведениял $3x^2a$, войби a-н умножиэ 3-л, суавун результатан умножиэ x^2-л и м. и. Суамма $a3x^2a$. Тâмâн произведениян войби кирьюттуа: $3a^2x^2$, азеттаен букват алфавитнойс порядкас, а числовойн множителян эдех.

г) $(\frac{1}{5}ax)\cdot 10$. Чтобы произведения умножиэ 10-л, войби умножиэ 10-л ӯхтен миттӯйзен-тахто сомножителёйс. $\frac{1}{5}$ умножимма 10-л; силлой суамма $2ax$.

д) $(a+x+1)\cdot 3$. Умножениян распределительнойн свойстван мугах суамма:

$$(a\cdot 3)+(x\cdot 3)+(1\cdot 3),$$

мин войби кирьюттуа ненга:

$$3a+3x+3.$$

е) $\frac{9ab}{3}$. Чтобы произведения $9ab$ ягуа 3-л, войби ягуа 3-л ӯхтен сомножителян 9; ягахуо, суамма $3ab$.

Упражненият.

Упростиэ следующойт выраженият, объясниен, миттўйзил действиёйн свойствил пидăў пользуйиксех ёга примиэрас:

10. $a + b + a + b + a$; $\quad x + 10 + (12 - x) + 3.$
11. $5 + a(b - 5) + a$; $\quad x + (a + x).$
12. $m + (n - m)$; $\quad 5aabxabxx.$
13. $(3xy) \cdot (2z)$; $\quad \left(\frac{2}{3}ax\right) \cdot 3.$
14. $(x + 3) \cdot 5$; $\quad 7(x + y + z)$
15. $(2a + 8b - 4c) : 4$; $\quad (10a^2b) : 2.$
16. $(72x - 18y) : 9$; $\quad (20a^2x^3) : (5ax^2).$
17. $\frac{a}{4} : \frac{b}{4}$; $\quad \frac{15ax}{7} : \frac{5a}{7}.$

ТОЙНЕ ОТДИЭЛА.

ОТНОСИТЕЛЬНОЙТ ЧИСЛАТ И ДЕЙСТВИЯТ НИЙЕН КЕ.

1. Понятия величинойх нӓх, кудамиэ войби эллендиӓ кахтес вастаккайзес миэлес.

17. Задуачча 1. Пуолен ӯӧн айгах термометра оᶾутти 2°, а пуолен пӓйвӓн айгах 5°. Ӓйял-го груадусал и куй мууттуй температура пуолес ӯӧс пуолех пӓйвӓх суате?

Тӓс задуачас условият эй олла выразитут полностью: пидӓӯ виэ озуттуа: 2° лӓммиӓ или 2° вилуо озутти термометра пуолен ӯӧн айгах; тӓмӓн мойзет указанияt пидӓӯ олла и пуолен пӓйвӓн температурах нӓх. Если, примиэракси, и пуолен ӯӧн айгах и пуолен пӓйвӓн айгах термометра озутти лӓммиӓ, то температура тӓл айян вӓлил ноузи 2°-с 5° суате, значит, ноузи 3°; если же пуолен ӯӧн айгах термометра озутти 2° вилуо (ал 0°), а пуолен пӓйвӓн айгах 5° лӓммиӓ (коргиэммал 0°), то температура ноузи 2+5, с. о. 7°-л и м. и.

Тӓс задуачас пагина мӓнӧӯ величинах нӓх, кудамуа войби чётайя кахтес вастаккайзес направлениях: температуран груадусойн лугуо войби чётайя ӯлӓх пӓй термометран нолевойс черتас и алах пӓй сийт. Он приймиттӯ 0° коргиэммал олиюа температуруа (лӓммин) чётайя положительнойкси и груадусойн лугуо обозначайя + знуакан ке, а 0° алембана олиюа температуруа (вилу) чётайя отрицательнойкси и груадусойн лугуо обозначайя знуакан ке —(недоразумениюа эй лиэне, если энзимӓйне числа оттуа совсем знуакатта).

Выразимма нӯгӧй миӓн задуачан, примерно, ненга: пуолен ӯӧн айгах термометра озутти —2°, а пуолен пӓйвӓн айгах +5°. Ӓйял-го груадусал и куй мууттуй температура пуолес ӯӧс пуолех пӓйвӓх суате? Нӯгӧй задуачча суау вполне определённойн отвиэтан: температура ноузи 2+5, с. о. 7°-л.

Задуачча 2. Конза Октябрьскойн рауда дороган (кудама ӯхтӯттӓӯ Ленинградан Москован ке) скорой поезда оли 100 *км* пиӓс станциях пӓй Бологое (тӓмӓ станция приблизительно он Москован и Ленинградан пуоли вӓлил), тӓмӓн дороган почтовой поезда оли 50*км* пиäс Бологойс. Миттӱӧн маткан пиäс олдих силлой нäмä поездат тойне тойзес?

Тäмäн мойзена тäмä задуачча эй оле юури определённой: тäс эй оле санотту, олдих-го поездат ӱхтел пуолел Бологойс, примиэракси Ленинградан пуолен направлениял, или же нет олдих Бологойс эри пуолил. Если энзимäйне, то поездойн вäли оли, нäгевäйне, 100 — 50, с. о. 50 *км*, если тойне, то тäмä вäли оли 100 + 50, с. о. 150 *км*. Значит, сикси чтобы тäмä задуачча олис определённой эй оле достаточно андуа вай поездойн вäлин суурус Бологойс пäй, но виэ пидäӱ озуттуа, мих направлениях пäй нäмä вäлит пидäӱ чётайя Бологойс пäй.

Тäс мейл опять он примиэра величинах нäх, кудамас пайчи сен размиэруа он виэ и **направления**. Ӱкси и сама матка (примиэракси 100 *км*) поездас Бологойх суате войби оттуа ӱхтех направлениях (примиэракси Московах пäй) и тойзех, вастаккайзех энзимäйзел (Ленинградах пäй). Обыкновеннойт арифметическойт числат озутетах вай маткан суурутта и ни мидä эй санота мейл направлениях нäх, кунне пäй тäмä вäли он отетту.

Тäс случайс маткан озуттаях числах пидäйс виэ лизäтä направлениян указания, примиэракси 100 *км* Московах пäй, 50 *км* Ленинградах пäй и м. и. Вай силлой задуачча ройх вполне определённой.

Направлениейн указаниян войби луадиэ ненга:

Нимитäммä миттӱйзен-тахто Октябрьскойн рауда дороган ӱхтен направлениейс (примиэракси направлениян Ленинградас Московах) **положительнойкси**, а вастаккайзен направлениян (Московас Ленинградах) **отрицательнойкси**; тäмäн мугах, положительнойх направлениях пäй чётайттавиэ вäлилӧй рубиэмма саномах **положительнолойкси вäлилӧйкси**, а отрицательнойх направлениях пäй чётайттавиэ вäлилӧй рубиэмма саномах **отрицательнолойкси**. Энзимäйзиэ рубиэмма выражайччемах числойл + (плюс) знуакойн ке или вовсе знуакатта, а тойзиэ числойл — (минус) знуакан ке.

Муга, если поезда он 100 *км* пиäс Бологойс Москован направлениял, то мӱӧ рубиэмма саномах, что сен вäли Бологойс пäй он + 100 *км* (или просто 100 *км*); если же поезда он, саномма 50 *км* пиäс Бологойс пäй Ленинградан направлениял, то мӱӧ саномма, что сен вäли Бологойс пäй он — 50 *км*. Тäс знуакат + и —, тиэттäвäйне, эй обозначайя лизиäннäн и пуоленнаннан действиейн, а вай условно оллах направлениейн обознуаччимиста варойн.

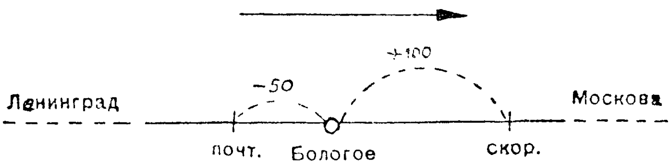
Выразимма нӱгӧй миäн задуачан ненга: конза Октябрьскойн рауда дороган скорой поезда он + 100 *км* (или просто 100 *км*) пиäс Бологойс, силлой тäмäн дороган почтовой поезда оли Бологойс пäй — 50 *км* пиäс. Мин питкӱс оли силлой нäмиэн поездойн вäли тойне тойзес? Нӱгӧй задуачча он выразитту точно и отвиэтта сил ройх определённой (качо черт. 1, кус стрелка озуттау дороган положительнойда направлениюа); поездойн вäли оли 100+50, с. о. 150 *км*.

12. Тойзет величинат, кудамиэ войби эллендиä кахтес вастаккайзес миэлес. Пайчи иэллизис задуачойс озутеттулой величиной, äйят тойзет муга же войях олла качоттуна кахтес вастаккайзес миэлес. Тäмäн мойзет оллах, примиэракси:

дохода	вастаккайзес	миэлес	ройх	расхода
выигрыша	,,	,,	,,	менетÿс
прибыля	,,	,,	,,	убытка
имущества	,,	,,	,,	велга и м. и.

Если цоходан, выигрышан, прибылян, имуществан и м. и. совимма лугемах положительнолойкси величинойкси и рубиэмма выражайччемах нийдä числойл + знуакан ке (или знуакатта), то расходуа, менетÿстä, убыткуа, велгуа и м. и. он приймиттÿ лугиэ ÿхтен луадуйзина величинойна, но отрицательнолойна и выражайя нийдä числойл знуакан ке — ; силлой войби сануо, что расхода он отрицательной дохода, менетÿс он отрицательной выигрыша и м. и. Тäмäн мойзел совиннал лиэтäх понятнойкси примиэракси, тäмäн мойзет устнойт выраженият: жилищной товарищества сай доходуа квартиэройс январял + 200 руб., февралял + 150 руб., мартал — 50 руб. (значит, мартал родих 50 руб. убыткуа); или тäмäн мойзет: ванхеммал веллел оли имуществуа 500 рублях, кескимäйзел 300 рублях, а нуориммал — 500 руб. (значит, нуориммал веллел оли велгуа 500 рублюа).

Пидäÿ, однако, замиэттиэ, что пайчи озутеттулой величиной он äйя тойзиэ, кудамис эй суа озуттуа „направлениюа"; примиэракси, эй суа эллендиä кахтес вастаккайзес миэлес объёмуа, площадиэ и äйиэ тойзиэ.



Черт. 1

13. Относительнойт числат. Арифметикас изучайдават числат оллах сен мойзиэн величинойн выражайндах нäхте, кудамиэн направленийей эй качелла (примиэракси, конза тахтотах тиэдиä вай миттÿöн-тахто маткан размиэра, а эй направления, кудаман мугах се чётайях). Алгебрас же качоттават числат оллах величинойн размиэран и нийен направлениян выражайндах нäхте. Сих нäхте миттÿöс-тахто ÿхтес миэлес элленнеттäвä величина выражайях числал иэс олиян + знуакан ке, а се же величина, элленнеттäвä вастаккайзес миэлес, выражайях числал иэс олиян — знуакан ке.

Числуа плюс (+) знуакан ке (кудамуа, впрочем вой и эй кирьюттуа) санотах *положительнойкси*; числуа минус (—) знуакан ке санотах *отрицательнойкси*. Муга, $+10$, $+\frac{1}{2}$, $+0{,}3$ оллах положительнойт числат, а -8 $-\frac{5}{7}$, $-3{,}25$ оллах отрицательнойт числат. Числойх ӱхтистетäх виэ 0 (ноля), кудамуа эй лугиэта ни положительнолойх, ни отрицательнолойх числойх. Выражениёй $+0$, -0, и просто 0 лугиэтах равносильнолойкси.

Положительнолой, отрицательнолой числой и нолюа санотах вообще *относительнолойкси* числойкси, чтобы отличайя нет обыкновеннолойс (или арифметическолойс) числойс, кудамиэн иэс эй оле ни миттӱйстä знуаккуа.

Относительнойн числан *абсолютнойкси величинакси* санотах тäдä числуа, отеттуо знуакатта; муга, числан -10 абсолютной величина он 10, числан $+5$ абсолютной величина он 5.

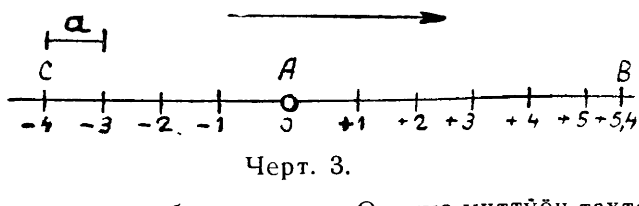
Кахта относительнойда числуа лугиэтах *ӱхтен суурyйзикси*, если нийл оллах ӱхтен мойзет абсолютнойт величинат и знуакат.

14. Числан изобразинда числовойл осял. Ойгиэн линиян отрезкакси (черт. 2) санотах миттӱöн-тахто ойгиэн линиян чуастиэ, раёйтеттуо молеммис пуолис пäй, примиэракси ӱхтес пуолес пäй точкал A, а тойзес — точкал B. Ёга отрезкас

Черт.

войби различчиэ: ӱхтекси, сен питкӱöн, тойзекси, направлениян, кудама аннетул отрезкал войби олла кахтен луадуйне. Примиэракси, миäн отетус отрезкас войби различäйя направлениян или точкас пäй A точках B или, яриллех, B-с пäй A-х. Если мӱö каччелемма отеттуо отрезкуа A-с B-х, то точкуа A мӱö рубиэмма саномах отрезкан аллукси, а точкуа B—сен лопукси.

Тäмäн мойзиэн отрезкойн авул мӱö воймма относительнойт



Черт. 3.

числат наглядно изобразиэ ненга. Отамма миттӱöн-тахто ойгиэн линиян (примиэракси горизонтальнойн) и совимма, кудамуа тахто кахтес тäмäн линиян направленияс лугиэ положительнойкси (черт. 3). Приймиммä, примиэракси, направлениян хурал пуолел пäй ойгиэх пуолех (стрелкал озутетту) положительнойкси, силлой вастаккайста направлениюа ойгиэл пуолел пӓй хурах пуолех рубиэмма лугемах отрицательнойкси. Иэллех, приймиммӓ миттӱӧн-тахто питкевӱӧн (чертежал изобразитун) a, питкӱӧн единицакси. Олгах нӱгӧй аннетту миттӱйне-тахто положительной числа, примиэракси $+5,4$. Отамма миӓн ойгиэл линиял произвольнойн точкан A и приймиммӓ сен отрезкойн аллукси; сен яльгех тӓс точкас ойгиэл пуолел пӓй отамма 5,4 a-н питкӱттӓ питкӱӧн единицуа. Силлой суамма отрезкан AB, кудаман питкӱс он 5,4 единицуа и кудаман направления он положительной. Тӓмӓн отрезкан лоппу B и изобразиу наглядно мейл числан $+5,4$. Отамма нӱгӧй отрицательнойн числан, примиэракси -4. Чтобы изобразиэ се наглядно, отамма самас точкас A хурал пуолел пӓй 4 питкӱӧн единицуа. Силлой суамма отрезкан AC, кудаман питкӱс он 4 единицуа, а направления отрицательной; тӓмӓн отрезкан лоппу C изобразиу числан -4.

Войби предстуавиэ ичел, что кай относительнойт числат оллах выразитут тӓх луадух, куй лопут направлённолойс отрезкойс, отложиттулойс ӱхтел и самал ойгиэл линиял сен ӱхтес и самас точкас пӓй A, отетус отрезкойн **а л л у к с и**. Силлой сил ойгиэн линиян чуастил, кудама он ойгиэл пуолел A-с, изобразитахес точкил положительнойт числат, а ойгиэн линиян чуастил, кудама он хурал пуолел A-с, изобразитахес отрицательнойт числат. Числа ноля тӓл ойгиэл линиял изобразих точкал A. Тӓмӓн мойста ойгиэда линиюа пуаксух санотах *числовойкси ойгиэкси*, или *числовойкси осякси*.

Сентӓх куй $+$ знуаккахизиэ числой выражайччиейн отрезкойн направления он вастаккайне — знуаккахизиэ числой выражайччиейн отрезкойн направлениял, то и нӓмиэ знуаккой он приймиттӱ сануо *вастаккайзикси знуакойкси*. Ёга кахта числуа, куй $+3$ и -3, $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и м. и., кудамиэн знуакат оллах вастаккайзет, а абсолютнойт величинат ӱхтен мойзет, санотах *вастаккайзикси числойкси*.

Качомма нӱгӧй, куй луаитах различнолой действиейн *относительнолойн числойн ке*.

II. Относительнолойн числойн лизиӓндӓ.

15. Задуачча. Кооперативной товарищества сай прибылюа январял a руб. и февралял b руб. Айян-го прибылюа сай товарищества кахтес куус?

Кирьютамма тӓмӓн задуачан решиндӓх нӓхте формулан. Он нӓгевӓйне, что кахтен куун ӓлох суаду прибыля он ӱхтен суурус ёга куус суадулойн прибылейн умман ке. Обознуаччихуо эчиттӓвӓн сумман x каути, суамма формулан:

$$x=a+b.$$

Но кооператива войби ўхтес куус или даже молеммис куулойс суаха эй прибылюа, а убыткуа. Чтобы и тäмäн мойзис случайлойс войс применяйя миäн формулуа, мейл пидäў буквил a и b подразумевайя относительнолой числой, с.о. положительнолой или отрицательнолой, каччоен сих, получиттих-го тäс куус прибылюа или убыткуа. Тäмäн мугах, мейл пидäў малтуа лизäтä относительнолой числой.

16. Кахтен числан лизиäндä. Разберимма энзимäй относительнолойн числойн лизиäннäн какси частнойда случайда.

а) **Кахтен вастаккайзен числан сумма он ноля.** Муга:

$$(+5)+(-5)=0;\ (-3)+(+3)=0;\ (+4{,}7)+(-4{,}7)=0.$$

Вообще:

$$(+a)=(-a)=0.$$

Тотта, если, примиэракси, кооператива ўхтес куус сай прибылюа, а тойзес сен же верран убыткуа, то фактически эй суа ни прибылюа ни убыткуа.

Юури муга же, если поезда аёй станциял пäй мих-тахто направлениях 5 *км*, а сен яльгех туаксе пäй тоже 5 *км*, то фактически се вовсе эй лойтоннут станциял пäй.

б) **Лизäтä миттўöх-тахто числах ноля или нолях лизäтä миттўйне-тахто числа, знуаччиу яттиä тäмä числа мууттаматта.** Муга:

$$(+75)+0=+75;\ (-75)+0=-75;$$
$$0+(+3{,}5)=+3{,}5;\ 0+(-3{,}5)=-3{,}5.$$

Вообще:

$$(+a)+0=+a;\ (-a)+0=-a.$$

Тотта, если, примиэракси, кооператива энзимäйзес куус сай 75 руб. прибылюа или убыткуа, а тойзес куус эй суаннут ни прибылюа, ни убыткуа, то фактически сил яй се же прибыли, или се же убытка, кудамат се сай энзимäйзес куус.

Кiäннўммä нўгöй предыдущойн параграфан задуаччах. Мўö кирьютимма общойн формулан сен решиндäх нäхте, именно:

$$x=a+b.$$

Качомма эри случайт, кудамат войях вастаудуо буквиэ a и b ваехтаес аннеттулойл числойл.

1-не случай. *Ега куус он суаду прибылюа.* Примиэракси, энзимäйзес куус он суаду 200 руб., а тойзес 150 руб. прибылюа. Тäс случайс: $a=+200$; $b=+150$. Нäгевäйне он, что:

$$x=(+200)+(+150)=+350,$$

с.о. кахтес куус кооператива сай 350 руб. прибылюа.

2-н е с л у ч а й. *Ёга куус он суаду убыткуа.* Примиэракси, знзимӓйзес куус он суаду 200 руб., а тойзес 150 руб. убыткуа.

Тӓс случайс: $a = -200$; $b = -150$. Нӓгевӓйне, он что:

$$x = (-200) + (-150) = -350,$$

с.о. кооператива кахтес куус сай 350 руб. убыткуа.

Нӓйс примиэройс войби луадиэ тӓмӓн мойзен выводан:

Чтобы лизӓтӓ какси числуа ӯхтен мойзиэи зиуакойи ке, пидӓӯ лизӓтӓ ийеи абсолютиойт величииат и паниа се же зиуакка.

3-с с л у ч а й. *Ӯхтес куус он суаду прибылюа, а тойзес убыткуа, причём прибылюа он суаду энӓмби, куй убыткуа.* Примиэракси, энзимӓйзес куус он суаду 200 руб. прибылюа, а тойзес 150 руб. убыткуа.

Тӓс случайс: $a = +200$; $b = -150$. Нӓгевӓйне он, что кооператива сай кайккиэдах 50 руб. прибылюа, с.о.

$$x = (+200) + (-150) = +50.$$

4-с с л у ч а й. *Ӯхтес куус он суаду прибылюа, а тойзес убыткуа, причём прибылюа он суаду вӓхемби, куй убыткуа.* Примиэракси, энзимӓйзес куус он суаду 200 руб. убыткуа, а тойзес 150 руб. прибылюа.

Тӓс случайс: $a = -200$; $b = +150$. Нӓгевӓйне он, что кахтес куус кооператива сай 50 руб. убыткуа, с.о.

$$x = (-200) + (+150) = -50.$$

Кахтес яльгимӓйзес примиэрас войби луадиэ выводан:

Чтобы лизӓтӓ ӯхтех какси эризиуаккахиста числуа, пидӓӯ лӧӱдиӓ ийеи абсолютиолойи величиийойи разиости и азеттуа сеи эдех сеи числаи зиуакка, кудамал абсолютиой величииа ои сууремби.

Лӯкӓттӯӧ иӓре + зиуакан положительнойн числан иэс, мӯӧ воймма ӯлембӓнӓ кирьютетут равенстват кирьюттуа лӯхемби

$$200 + (-150) = 50; \quad -200 + 150 = -50.$$

17. Лизиӓинӓи правилойи тойие выражеиия. Какси миӓн озутеттуо лизиӓнӓн правилуа войби ваехтуа тойзел кахтел ӯлен удобнойл правилал:

а) **Лизӓтӓ положительной числа, зиуаччиу лизӓтӓ сеи абсолютной величина.** Муга:

$$(+7) + (+3) = +10 \quad \text{и} \quad (+7) + 3 = 7 + 3 = 10;$$
$$(-7) + (+3) = -4 \quad \text{и} \quad (-7) + 3 = -7 + 3 = -4.$$

б) **Лизăтă отрицательной числа знуаччиу пуолендуа сен абсолютной величина.** Муга:

$$(+7)+(-10)=-3 \quad \text{и} \quad (+7)-10=7-10=-3;$$
$$(-7)+(-10)=-17 \quad \text{и} \quad (-7)-10=-7-10=-17.$$

Нăмă какси правилуа **войби лўхемби** выразиэ **каксинай**-зиэн знуакойн **формулойл:**

$$+(+a)=+a; +(-a)=-a.$$

18. Колмен и энăммăн числан лизиăндă. Энзимăй эчитăх кахтен энзимăйзен **лизăттăвăн** сумма, сих **лизăтăх колмас лизăт**-тăвă и м. и. Олгах, примиэракси, лŏўеттăвă сумма:

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

кудаман **войби лўхемби** кирьюттуа ненга:

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Луаимма **лизиăннăн тăмăн мойзес** порядкас:

$$8+(-5)=3; \; 3+(-4)=-1; \; (-1)+3=2.$$

Но эй **оле** надобностиэ соблюдайя **тăмăн мойста** порядкуа, сентăх куй (куй тервăх мўŏ нăеммă, § 25) **лизăттăвиэн** сиёй **вой**-би ваехтелла и нийдă **войби** ўхтўтеллă миттўмих-тахто группих.

Упражнениям.

18. $(+7)+(+3)$; $\quad(-7)+(-3)$; $\quad\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(2\frac{1}{2}\right)$.

19. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$; $(+10)+(-2)$; $\quad(+10)+(-12)$.

20. $(-5)+(+5)$; $\quad(-5)+(+2)$; $\quad4+(-3)$.

21. $(-4)+3$; $\quad8+(-10)$; $\quad(-8)+10$.

22. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$.

23. $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$.

III. Относительнолойн числойн пуоленнанда.

19. Задуачча. Фуабрикан прибыли 2 куус, январяс и февраляс, **оли** a руб. Суури-го **оли** прибыли февраляс, если **он** тиэтойс, **что** январяс фуабрикка андой b руб. прибылюа?

Прибыли кахтес куус, **тиэттăвăйне, он** эриже кайкис куулойс суадулойн прибылёйн сумма, причём прибыли войби **тойчи** выражайяксех **положительнойл** числал, **тойчи отрицательнойл** (убытка).

Сентăх эчиттăвă февралян прибыли должен олла мойзена **положительнойна или отрицательнойна** числана, кудама, **лизăт**-**тўнă относительнолойн числойн лизиăннăн** правилойн **мугах** январян прибылин ке, андау **молеммис** куулойс суадулойн прибылёйн сумман. Тӓдӓ мӯбте, миӓн задуачас он аннетту сумма a и ӯкси лизӓттӓвис b, а пидӓӯ лӧӯдиӓ тойне лизӓттӓвӓ.

Действиюа, кудаман авул аннетун кахтен лизӓттӓвӓн сумман и ӯхтен нӓйс лизӓттӓвис мугах лӧӯветӓх тойне лизӓттӓвӓ, санотах пуолендамизекси, каччоматта сих, оллах-го аннетут числат арифметическойт или относительнойт; тӓс аннеттуо суммуа санотах *пуоленнеттавакси*, аннеттуо лизӓттӓвиӓ — *пуолендаякси*, а эчиттӓвиӓ числуа — *разностикси*. Тӓс следуйччоу, что пуолендамизен правильностин мӯб айнос воймма провиэриэ лизиӓннӓл: эчиттӓвӓн разностин лӧӯдӓхӯб, лизиӓммӓ сен пуолендаян ке; если суммах суамма пуоленнеттаван, то пуоленнанда он луаитту верно.

20. Разностин лӧӯдӓмине куй ӯхтенӓ лизӓттӓвӓнӓ. Миӓн задуачас эчиттӓвӓн разностин обознуаччихуо x каути, мӯб воймма кирьюттуа:

$$x = a - b.$$

Лӧӯвӓммӓ разностин $a - b$ сууруон следующолойс частнолойс случайлойс:

а) Олгах $a = +1000$; $b = +400$. Тӓмӓ знуаччиу, что январяс фуабрикка андой прибылюа 400 руб.; а кайккиэдах кахтес куус оли суаду 1000 руб.; нӓгевӓйне, февраля андой тоже прибылюа 600 руб. Значит:

$$x + = (+1000) - (+400) = +600,$$

или простоймби:

$$x = 1000 - 400 = 600.$$

Провиэримма результатан лизиӓннӓл:

$$(+600) + (+400) = +1000.$$

б) Олгах $a = +1000$ и $b = +1000$. Тӓмӓ знуаччиу, что январяс фуабрикка андой 1000 руб. прибылюа и кахтес куус прибыли яй сен же мойзекси. Нӓгевӓйне, что февраляс фуабрикка эй андануt ни прибылюа, ни убыткуа. Значит:

$$x = (+1000) - (+1000) = 0.$$

Провиэримма лизиӓннӓл:

$$(+1000) + 0 = +1000.$$

Пуоленнанда он луаитту верно. Ненгомал же рассуждениял суамма, что

$$(-1000) - (-1000) = 0.$$

в) $a = 1000$; $b = +1200$. Тӓмӓ знуаччиу, что фуабрикка январяс андой прибылюа 1200 руб., а кахтес куус тули прибылюа кайккиэдах 1000 руб. Нӓгевӓйне, что вуйтти январскойс прибылис, именно 200 руб., мӓни февральскойн убыткан каттамизех. Тӓс пӓй:

$$x=(+1000)-(+1200)=-200,$$

или простоймби:

$$x=1000-1200=-200.$$

Провиэримма лизиӓннӓл:

$$(-200)+(+1200)=+1000.$$

г) $a=+1000$; $b=-200$. Тӓмӓ знуаччиу, что januaryяс фуаб-рикка андой убыткуа 200 руб., а кахтес куус родих прибылюа 1000 руб. Нӓгевӓйне тӓмӓн прибылин андой февраля, кудама, пайчи сидӓ каттой 200 руб. суурuон январскойн убыткан, с. о. се должен оли андуа 1200 руб. прибылюа. Тӓс пӓй:

$$x=(+1000)-(-200)=+1200, \quad \text{или} \quad x=1000-(-200)=1200.$$

Провиэримма лизиӓннӓл:

$$(+1200)+(-200)=+1000.$$

д) $a=-100$; $b=+800$. Тӓмӓ знуаччиу, что января андой 800 руб. прибылюа, силлой куй кахтес куус родих 100 руб. убыт-куа. Нӓгевӓйне, что февраля андой убыткан, кудама хӓвитти кайкен 800 рублян суурuон январскойн прибылин, и виэ яй 100 руб. убыткуа, с.о. кай февральской убытка он 900 руб. Тӓс пӓй:

$$x=(-100)-(+800)=-900, \quad \text{или} \quad x=-100-800=-900.$$

Провиэримма лизиӓннӓл:

$$(-900)+(+800)=-100.$$

е) $a=-100$; $b=-150$, с. о. января андой убыткуа 150 руб., а кахтес куус родих кайккиэдах 100 руб. убыткуа. Значит, январскойн убыткан чуасти, именно 50 руб., оли катетту мойзел же февральскойл прибылил. Тӓс пӓй:

$$x=(-100)-(-150)=+50.$$

Провиэримма лизиӓннӓл:

$$50+(-150)=-100.$$

21. Пуоленнаннан правила. Качеллен предыдущойс пара-графас туодулой примиэрой, мӯӧ воймма замиэттиэ, что ёга ка-чотус случайс мӯӧ войзимма аннетун числан пуолендамизен ваех-туа сил вастаккайзен числан лизиӓннӓл.

Тотта, отамма, примиэракси случайн а):

$$(+1000)-(+400)=+600.$$

Числан $+400$ пуоленнаннан сиях лизиймма сил вастаккайзен числан:

$$(+1000)+(-400)=+600.$$

Саймма сен же результатан.

Отамма случайн г):

$$(+1000)-(-200)=+1200.$$

Ваехтамма пуоленнаннан вастаккайзен числан лизиӓннӓл,

$$(+1000)+(+200)=+1200.$$

Результатта он сама.

Отамма, яльгимӓй, случайн д):

$$(-100)-(+800)=-900.$$

Но юури муга же:

$$(-100)+(-800)=-900.$$

Сен же вой озуттуа и кайкких досталилойх случайлойх нӓх.

Кайкис случайлойс аннетун числан пуолендамизен мӱӧ воймма ваехтуа вастаккайзен числан лизиӓмизел пуоленнеттавах. Тойзил санойл, пуоленнанда действиян мӱӧ воймма ваехтуа лизиӓннӓн действиял, луадиэ кудаман мӱӧ ё малтамма. Тӓс лиэнӧӱ правила:

Чтобы пуолендуа миттӱйне-тахто числа, пидӓӱ вай пуоленнеттавах лизӓтӓ числа, вастаккайне пуолендаял.

22. **Каксинайзиэн знуакойн формулат.** Следовательно, аннетун правилан мугах, положительнойн числан $+a$ пуолендамизен вой ваехтуа отрицательнойн числан $-a$ лизиӓмизел, а отрицательнойн числан $-a$ пуолендамизен вой ваехтуа положительнойн числан $+a$ лизиӓмизел; сен вой выразиэ тӓмӓн мойзил каксинайзиэн знуакойн формулойл:

$$-(+a)=-a;\ -(-a)=+a.$$

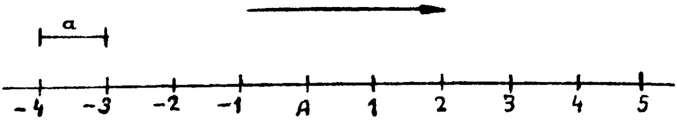
23. **Алгебраической сумма и разности.** Относительнойт числат аннетах возможности ёга разности предстуавиэ суммана, и наоборот, ёга сумма предстуавиэ разностина. Примиэракси, разности $7-3$ вой олла кирьютетту ненга: $(+7)+(-3)$, или простоймби: $7+(-3)$; сумма $4+2$ вой олла изобразитту ненга: $(+4)-(-2)$, или простоймби: $4-(-2)$.

Тӓмӓн луадух, ёга выражениян, кудама представляйччоу яллеккӓйзиэн лизиӓннӓн и пуоленнаннан риӓвун, войби предстуавиэ суммана. Примиэракси:

$$20-5+3-7=20+(-5)+3+(-7).$$

Сентӓх алгебрас кай относительнолойн числойн лизиӓндӓ и пуоленнанда случайт вой ӱхтӱттиӓ ӱхтех действиях, кудамуа санотах *алгебраическойкси лизиӓннӓкси*.

Суммуа, кудамас лизӓттӓвӓт войях олла положительнолойна, отрицательнолойна и нолян сууруйзина числойна, он приймиттӱ сануо *алгебраическойкси суммакси*, отличиякси арифметическойс суммас, кудамас кай лизӓттӓвӓт оллах обыкновеннойт числат (арифметическойт). Муга же разностиэ санотах *алгебраическойкси*, если сийт пуоленнеттава и пуолендая оллах относительнойт числат.



Черт. 4.

24. Относительнолойн числойн сравнинда сууруон мугах. Конза мӱӧ саномма, что 10 он сууремби 7, тӓмӓ знуаччиу, что разности $10-7$ он положительной числа, силлой куй разности $7-10$ он отрицательной. Совимма тӓмӓн понятиян суурембах и пиэнембӓх нӓх распространиэ относительнолойх числойх, а именно — рубиэмма лугемах, что **относительной числа *a* он сууремби тойста относительнойда числуа *b* сийт случайс, если разности *a—b* он положительной числа, и *a* он пиэнемби *b*-дӓ силлой, конза разности *a—b* он отрицательной числа.** Тӓмӓн условиян ке мӱӧ должны приймиэ, что:

1. **Ёга положительной числа он сууремби нолюа и сууремби ёга отрицательнойда числуа;** примиэракси, $8>0{,}8>-10$, сентӓх куй молеммат разностит $8-0$ и $8-(-10)$ оллах положительнойт числат.

2. **Ёга отрицательной числа он пиэнемби нолюа и пиэнемби ёга положительнойда числуа;** примиэракси, $-5<0$ и $-5<+2$, сентӓх куй разностит $-5-0$ и $-5-(+12)$ оллах отрицательнойт числат.

3. **Кахтес отрицательнойс числас он се сууремби, кудамал абсолютной величина он пиэнемби;** муга $-5>-12$, сентӓх куй разности $-5-(-12)$ он положительнойн числан 7 суурус.

Алгебраическолойн числойн сравнительнойн величинан сельвембӓх представляйччемизех нӓхте он парас изобразиэ нет наглядно числовойл осял. Валлиттуо произвольнойн питкевӱс единицан *a* (черт. 4), вообразимма, что раяттомал ойгиэл линиял, миттӱӧн-тахто аллукси отетун точкан *A* ойгиэл пуолел оллах отетут отрезкат, изображайччият положительнолой числой, а курал пуолел сийт же точкас пӓй он отетту отрезкат, кудамат изображайях отрицательнолой числой. Силлой сийрдӱен тӓдӓ ойгиэда мӱӧте курал пуолел пӓй ойгиэх пуолех (куй озуттау стрелка чертежал), мӯӧ кайкен айгуа рубиэмма переходимах пиэнеммис числойс суурембих, а сийрдӯен яриллех пӓй, ойгиэл пуолел пӓй хурах, мӯӧ кайкен айгуа рубиэмма переходимах суурембис числойс пиэнембих. Тойзил санойл, кахтес любойс числас сууремби он се, кудама он энӓммӓл ойгиэс пуолес пӓй числовойс осяс. Тӓл осял он кебиэ провиэриэ васта саноттулойн колмен положениян правильности относительнолойн числойн сравнительнойх величинах нӓх.

Замечания. Если тахтотах выразиэ лӯхӯости, что a он положительной числа, то кирьютетах $a > 0$; если же пидӓӯ озуттуа, что a он отрицательной, то кирьютетах $a < o$.

Упражнениять.

23. Тавара он остетту a руб., a мӯӧдӯ b рубляс. Ӓйя-го он суаду прибылюа? Чёгайя тӓмӓ прибыля, если $a = 40$ и $b = 35$. Мидӓ знуаччиу тӓс отрицательной отвиэтта?

25. Эрӓс ихмине ёга кууда суау доходуа m руб., а труаттиу n руб. Ӓйя-го хӓнел йиӓӯ ёга кууда? Чётайя отвиэтта, если $m = 120$ и $n = 130$. Мидӓ знуаччиу отрицательной отвиэтта?

Следующолойс примиэройс луадиэ озутетут действият:

26. $12-(-2)$; $5-(-5)$; $(+8)-(-10)$; $(+1)-(-1)$.
27. $a-(-b)$; $(+m)-(-n)$; $(+2x)-(-3x)$.
28. $10+(+2)-(-4)-(+2)+(-2)$.
29. Чётайя сумма $a+b+c+d$, если $a=2$, $b=-3$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{4}$.
30. Чётайя разности $m-n$, если $m=-10$ и $n=-15$.
31. Предстуавиэ выражения $10-2-3+7$ относительнолойн числойн сумман видас.
32. Предстуавиэ сумма $10+8$ относительнолойн числойн разностин видас.

IV. Относительнолойн числойн лизиӓннӓн и пуоленнаннан главноймммат свойстват.

25. Убедиммоксех примиэройл, что нет лизиӓннӓн и пуоленнаннан свойстват, кудамат мӯӧ озутимма арифметическолойх числойх (§ 6, 7) нӓхте, йиӓхӓх и относительнолойх числойх нӓхте.

а) Переместительной закона: **сумма эй мууту лизӓттӓвиэн сиёйн ваехтундас.** Примиэракси:

$$(+20)+(-5)=+15 \text{ и } (-5)+(+20)=+15;$$
$$(-10)+(-2)+(+40)=+28;$$
$$(+40)+(-10)+(-2)=+28;$$
$$(-2)+(+40)+(-10)=+28 \text{ и м. и.}$$

б) Сочетательной закона: **сумма эй мууту, если миттӯӧт-тахто лизӓттӓвӓт мӯӧ ваехтамма нийен суммал.**

Муга, суммуа:

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3$$

чётайес мӱӧ воймма миттӱӧн-тахто лизäттäвис, примиэракси, тойзен и колманнен, ваехтуа нийен суммал, чётайен энзимäй: $(+3)+(-1)=+2$; силлой ройхес: $(-4)+(+2)+(+5)=+3$, с. о. мӱӧ суамма сен же сумман, куй и энне.

в) **Чтобы миттӱӧх-тахто числах лизäтä монеи лизäтт сумма, войби тäх числах лизäтä ёга лизäттäвäн эриже т тойзен яльгех.**

Пидäккäх, примиэракси, числах 40 лизäтä сумма $20+(-5)+$ $+(+7)$, мин войби выразиэ ненга:

$$40+[20+(-5)+(+7)].$$

Мӱӧ воймма энзимäй чётайя лизäттäвäн сумман:

$20+(-5)=20-5=15$; $15+(+7)=15+7=+22$ и сен яльгех суавун числан $+22$ лизäтä 40-х:

$$40+(+22)=+62.$$

Но тäмäн сиях мӱӧ воймма 40-х лизäтä энзимäй энзимäйзен лизäттäвäн 20, сен яльгех тойзен лизäттäвäн -5 и, яльгимäй, колманнен лизäттäвäн $+7$:

$$40+20=60;\ 60+(-5)=55;\ 55+(+7)=62.$$

Лопуллине сумма ройх ӱкси и сама.

г) **Чтобы миттӱйзес-тахто числас пуолендуа монен лизäттäвäн сумма, вой тäс числас пуолендуа ёга лизäттäвäн эриже ӱкси тойзен яльгех.**

Пидäккäх, примиэракси, пуолендуа 20-с сумма $10+(-4)+$ $+(-3)$, мин вой выразиэ ненга:

$$20-[10+(-4)+(-3)].$$

Мӱӧ воймма энзимäй чётайя пуоленнеттаван сумман:

$$10+(-4)=10-4=6;\ 6+(-3)=6-3=3,$$

сен яльгех суавун числан пуолендуа 20-с:

$$20-3=17.$$

Но тäмäн сиях мӱӧ воймма 20-с энзимäй пуолендуа энзимäйзен лизäттäвäн 10, сен яльгех тойзен лизäттäвäн -4, и яльгимäй, колманнен лизäттäвäн -3:

$$20-10=10;\ 10-(-4)=10+4=14;$$
$$14-(-3)=14+3=17.$$

Мӱӧ саймма сен же числан, мин и энне.

Муга же войби озуттуа досталилойн относительнолойн числойн лизиäннäн и пуоленнаннан свойствиэн справедливостин.

V. Относительнолойн числойн умножинда.

26. Задуачча. Октябрьскойда рауда дорогуа мӯбте аяу поезда среднёйн скоростин ке v километруа чуасус. [1]) Кески пăйвăн айгах поезда он станциял Бологое. Кус ройх поезда t чуасун пройдихуо?

Выведимма тăмăн задуачан решиндăх нăхте формулан. Если 1-с чуăсус поезда аяу v километруа, то t чуасус се аяу t кердуа питкеммăн вăлин. Значит, эчиттăвă вăли x он v, умножитту t-л:

$$x = vt.$$

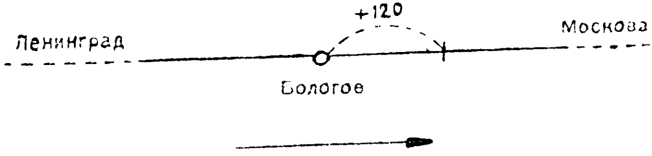
Если, примиэракси, $v = 40$ и $t = 3$, то поезда он $40 \cdot 3 = 120$ *км* пиăс станцияс пăй Бологое.

Тăмă решиндă эй анна виэ точнойда отвиэттуа задуачас азететтух вопроссах. Мӯӧ эммă тийя, мих направлениях пăй мейл пидăӯ оттуа нăмă 120 *км*: Московах или Ленинградах пăй. Относительнолойн числойн оттамине андау мейл возможностин точно вастата азететтух вопроссах.

Совимма чётайя направлениюа Ленинградас Московах пăй положительнойна. Силлой кай вăлит, кудамат мӯӧ рубиэмма лугемах станцияс Бологое Московах пăй, ройтахес положительнолойна, а Ленинградах пăй — отрицательнолойна. Соответственно, скорости, с. о. 1 чуасун алох аетту вăли, ройх положительной, если поезда аяу Московах пăй, и отрицательной, если се аяу Ленинградах пăй.

Нӯгӧй мӯӧ воймма андуа точноймман отвиэтан азететтух вопроссах.

Если поезда аёй Московах пăй, значит сен скорости оли $+40$ *км* чуасус, и колмен чуасун пройдихуо се ройхес $x = (+40) \cdot 3 = +120$ *км* пиăс Бологойс пăй, с. о. эйстӯӯ 120 *км* Московах пăй (черт. 5).



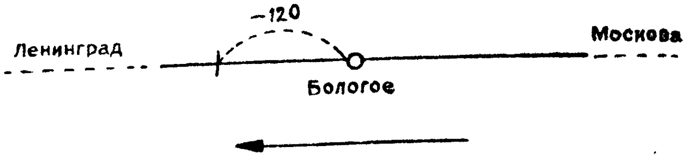
Черт. 5.

Если поезда аёй Ленинградах пăй, то сен скорости оли -40 *км*, и 3 чуасун пройдихуо се ройтех $(-40) + (-40) + (-40) = -120$ *км* пиăс Бологойс Ленинградах пăй (черт. 6). Тăс мӯӧ заключайчемма, что

$$x = (-40) \cdot 3 = -120.$$

---

[1]) Чтобы олис простоймби чётайя, мӯӧ предполагайчемма, что поезда кайкен айин аяу ӯхтел и самал скоростил и эммă ота вниманиях станциэлойл сейзомдуа.



Черт. 6.

Нӱгӧй миӓн формула $x = vt$ андау мейл точнойн отвиэтан вопроссах, кус ройхес олемах поезда, вай v рубнэу суамах положительнолой или отрицательнолой значенией, каччоен сих направлениях, кунне пӓй аяу поезда.

Если, примиэракси, $v = +50$ и $t = +4$, то формула андау:

$$x = (+50) \cdot (+4) = +200,$$

с. о. поезда ройхес 200 *км* пиӓс Бологойс пӓй Москован направлениял.

Если $v = -30$ и $t = +2$ то:

$$x = (-30) \cdot (+2) = -60,$$

с. о. поезда ройхес 60 *км* пиӓс Бологойс пӓй Ленинградан направлениял.

Куй тийяммӓ арифметикас пӓй, ӱниӓлизел числал умножиида он действия, кудамаи авул ӱкси числа (множимой) повторяйчех лизӓттӓваиӓ сеи верраи кердуа, ми ои единицой тойзес числас (множителяс). Умножиида дробил ои действия, кудамаи авул лӧӱветӓх сен мойие множимойи дроби, миттӱйзеи состуавиу множителя единицас.

Предыдущойс задуачас нӓгӱӱ, что нӓмиэ определенией войби применяйя и относительнолойн числойн умножиндах, конза множителя он положительной числа. Примиэракси, -5 умножиэ $+3$-л (или просто 3-л), знуаччиу повториэ -5 лизӓттӓвӓнӓ 3 кердуа (суамма -15); 0 умножиэ 5-л знуаччиу повториэ 0 лизӓттӓвӓнӓ 5 кердуа (суамма 0); -12 умножиэ $+\frac{3}{4}$-л (или просто $\frac{3}{4}$-л) знуаччиу лӧӱдиӓ $\frac{3}{4}$ числас -12 (суамма -9).

27. Отрицательнойл числал умножинда. Муутамма иэллизен задуачан ненга: пуолен пӓйвӓн айгах поезда оли станциял Бологое; кус се оли 3 чуассуо туаксе пӓй? Задуачан решшимизех нӓхте мейл опять пидӓӱ умножиэ поездан скорости поездан маткуанда айял. Молембиэн задуачойн условият оллах ӱхтен луадуйзет и решиндӓ способат оллах ӱхтен мойзет, но отвиэтта ройх разной, каччоен сих, мӓнӧӱ-го пагина айгах нӓх энне пуолда пӓйвиӓ вай яльгех пуолда пӓйвиӓ.

Если мӱӧ тахтомма, чтобы миӓн формула $x = vt$ андайс мейл точнойн отвиэтан кайкис случайлойс, луаимма ненга.

Рубиэмма айгуа яльгех пуолен пăйвăн чётайччемах положительнойна и, каччоен сих, мих айгах нăх он пагина, числа t ройх положительной или отрицательной. Тăх луадух, молеммат множителят, v и t войях нўгŏй суаха и положительнолой и отрицательнолой значениёй.

Качомма кай случайт, кудамат войях олла миăн задуаччуа решшиес, причём ёга сияс рубиэмма лугемах, что пуолен пăйвăн айгах поезда он Бологойс и аяу скоростин ке 40 *км* чуасус.

1-н е с л у ч а й. Поезда аяу Московах пăй; кус се ройх 3 чуасун пройдихуо? Тăс скорости он положительной: $v=+40$; айга тоже он положительной: $t=+3$. Тăмă случай ё мейл оли качотту, и оли суаду отвиэтта:

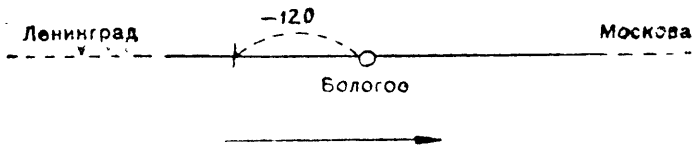
$$x=(+40)\cdot(+3)=+120.$$

2-н е с л у ч а й. Поезда аяу Ленинградах пăй; кус се ройх 3 чуасун пройдихуо? Тăс скорости он отрицательной: $v=-40$; айга он положительной: $t=+3$. Тăмăн случайн мўŏ муга же качоймма. Решиндă андау:

$$x=(-40)\cdot(+3)=-120.$$

3-с с л у ч а й. Поезда аяу Московах пăй; кус се оли 3 чуассуо туаксе пăй? Тăс случайс скорости он положительной: $v=+40$, а айга он отрицательной: $t=-3$.

Нăгевăйне, что 3 чуассуо туаксе пăй поезда оли Ленинградан и Бологойн станциёйн вăлил, 120 *км* пиăс яльгимăйзес (черт. 7).



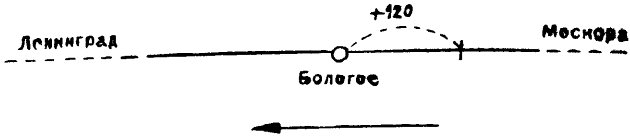
Черт. 7.

120 *км* вăли он хурал пуолел Бологойс пăй следовательно, се он отрицательной. Тăх луадух:

$$x=(+40)\cdot(-3)=-120.$$

4-с с л у ч а й. Поезда аяу Ленинградах пăй; кус се оли 3 чуассуо туаксе пăй? Тăс и скорости и айга оллах отрицательнойт: $v=-40$ и $t=-3$.

Нăгевăйне, что колме чуассуо туаксе пăй поезда оли Москован и Бологойн станциёйн вăлил, 120 *км* пиăс яльгимăйзес (черт. 8).



Черт. 8.

Вӑли Бологойс Московах он положительной, следовательно:

$$x = (-40)\cdot(-3) = +120.$$

28. **Умножениян правила**. Если бы предыдущойс задуачас числойн 40 и 3 сиях мӯӧ оттанузимма миттӯӧт-тахто муут числат (сийт лувус и дробнойт), то тӑмӑн периӑ, нӑгевӑйне, рассуждениӗйн ходу эй мууттуйс. Установимма же нӯгӧй относительнолойн числойн умножиннан общойн правилан.

Кирьютӑмма кай случайт, кудамат вастаувуттих умножиес, и обобщимма нет любойлой числой варойн.

$$(+40)\cdot(+3) = +120 \quad \text{или вообще} \quad (+a)\cdot(+b) = +ab;$$
$$(-40)\cdot(+3) = -120 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (-a)\cdot(+b) = -ab;$$
$$(+40)\cdot(-3) = -120 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (+a)\cdot(-b) = -ab;$$
$$(-40)\cdot(-3) = +120 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (-a)\cdot(-b) = +ab.$$

Нӑйен случайлойн сравнихуо нӑеммӑ, что:

1. Если молеммил сомножителӗйл оллах ӯхтен мойзет знуакат, то произведения он положительной.
2. Если молеммил сомножителӗйл оллах вастаккайзет знуакат, то произведения он отрицательной.
3. Произведениян абсолютной величина он сомножителӗйн абсолютнолойн величинойн произведениян суурус.

Тӑс суамма тӑмӑн мойзен общойн правилан:

Чтобы лӧӱдиӑ кахтен относительнойн числан произведения, пидӑӱ умножиэ нийен абсолютнойт величинат и произведениятоттуа + знуакан ке, если молеммил сомножителӗйл оллах ӯхтен мойзет знуакат, и — знуакан ке, если нийл оллах вастаккайзет знуакат.

Тӑмӑн правилан чуастиэ, кудама относих знуаккойх, санотах *знуакойн правилакси*. Се обыкновенно выражайях ненга: **кахта числуа умножиес ӯхтен мойзет знуакат аннетах** +, **а разнойт —.**

Качеллес туодулой примиэрой войби установиэ виэ ненгоман правилан, кудамал тойчи пидӑӱ пользуйяксех: **положительнойл числал умножиес множимойн знуакка эй мууту** (с. о. произведениял он се же знуакка, ми и множимойл); **отрицательнойл числал умножиес множимойн знуакка мууттуу вастаккайзекси.**

Замиэтимма виэ, что произведения он айнос ноля, **если** ӯкси сомножителӗйс он ноля.

29. Колмен и энäммäн числан произведения. Произведениян знуакка.

Пидäккäх чётайя произведения:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-5).$$

Тäх нäхте умножимма энзимäйзен числан тойзел, суавун результатан умножимма колманнел числал, уувен суавун произведениян умножимма неллäннел и м. и.

$$(+2)\cdot(-1)=-2;\quad (-2)\cdot(+3)=-6;\quad (-6)\cdot(-10)= =+60;\quad (+60)\cdot(-4)=-240;\quad (-240)\cdot(-5)=+1200.$$

Если перемножайяхес вай ўхтет положительнойт числат, то произведения он положительной. Но конза кай или эрäхäт сомножителят оллах отрицательнойт, то **произведения ройх положительной сийт случайс, если отрицательнолой сомножителёй он чётной числа, и отрицательной сийт случайс, конза тäмäн мойзиэ сомножителёй он нечётной числа.** Муга:

1 отрицательной сомножителя:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6;$$

2 отрицательнойда сомножителюа:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60;$$

3 отрицательнойда сомножителюа:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240 \text{ и м. и.}$$

30. Отрицательнойн числан степени. Применимма предыдущойн параграфан правилуа ўхтен мойзиэн сомножителёйн умножиндах, с. о. степених ностамизех.

Лöўвäммä миттўöн-тахто отрицательнойн числан квадратан:

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9;\ (-7)^2=(-7)\cdot(-7)=+49.$$

Вообще:

$$(-a)^2=(-a)\cdot(-a)=+a^2,$$

с. о. отрицательнойн числан квадратта он положительной числа.

Лöўвäммä нўгöй миттўöн-тахто отрицательнойн числан кубан:

$$(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8;\ (-6)^3=(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)= =-216.$$

Вообще:

$$(-a)^3=(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)=-a^3,$$

с. о. отрицательнойн числан куба он отрицательной числа.

Эй оле югиэ замиэттиэ, что отрицательнойда числуа **ностаес любойх чётнойх степених ройхес** положительной числа, сентäх куй отрицательнолойн множителёйн лугу он тäс случайс чётной (качо § 29).

3—1287—15

Муга:

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81;$$
$$(-2)^6 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +64 \text{ и м. п.}$$

Сида же причинуа мӯӧте **отрицательнойн числан любой нечётной степени он отрицательной числа.** Муга:

$$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243;$$
$$(-2)^7 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -128 \text{ и. м. и.}$$

Тāмāн мугах:

Отрицательнойн числан чётной степени он положительной числа, а нечётной степени — отрицательной числа. Замиэтимма, что.

$$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \ldots = +1,$$
$$(-1)^3 = (-1)^5 = (-1)^7 = \ldots = -1,$$

***Упражненият*:**

33. $(-2)\cdot(-3)$; $(+7)\cdot(-2)$; $(-8)\cdot(-10)$.

34. $\left(-8\frac{1}{2}\right)\left(+2\frac{3}{4}\right)$; $(+0{,}36)$ $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$.

35. $(-1)^2$; $(-1)^3$; $(-1)^4$; $(-1)^5$.

36. Чётайя выражения: $ax^2 + bx + c$, если $a = 3$, $b = -4$, $c = -5$ и $x = 4$

37 Чётайя се же выражения, если $a = -8$, $b = 4$, $c = +5$ и $x = 4$.

38. $4\cdot 0$; $5\frac{1}{2}\cdot 0$; $0{,}3\cdot 0$; $-8\frac{3}{4}\cdot 0$; $0\cdot x$ · 39. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(+3{,}5)\cdot(+2)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$

VI. Относительнолойн числойн юанда.

31. **Определения. Относительнолойн числойн (куй и арифметическолойн) юанда он действия, кудаман авул кахтен сомножителян произведениян и ӯхтен нāмис сомножителёйс мугах , лӧӯветāх тойне сомножителя.** Муга, $+10$ ягуа -2 знуаччиу, лӧӯдиā мойне числа x, чтобы произведения $(-2)\cdot x$ олис $+10$; мойне числа он -5, сентāх куй произведения $(-5)\cdot(-2)$ он $+10$.

Тāс определенияс пāй следуйччоу, что юаннан правильностин войби провиэриэ умножениял: если, частнойн умножихуо ягаял, мӯӧ суамма юаттаван, то действия он луаитту верно.

32. **Юанда правилан вывода.** Качомма следующойт относительнолойн числойн юаннан примиэрат:

$$
\begin{array}{llll}
(+10):(+2) = +5, & \text{сентāх что} & (+2)\cdot(+5) = +10; \\
(-10):(-2) = +5, & \quad \text{„} \quad \text{„} & (-2)\cdot(+5) = -10; \\
(-10):(+2) = -5, & \quad \text{„} \quad \text{„} & (+2)\cdot(-5) = -10; \\
(+10):(-2) = -5, & \quad \text{„} \quad \text{„} & (-2)\cdot(-5) = +10.
\end{array}
$$

Нāмис примиэройс выводимма правилан.

Чтобы ӯкси числа (юаттава) ягуа тойзел (агаял), пидāӯ юаттаван абсолютной величина ягуа ягаян абсолютнойл величинал и резуль-

чатта оттуа + знуакан ке, конза молеммия аннеттулойл числойл оллах ӯхтен мойзет знуакат, и — знуакан ке, конза нийл оллах разнойт знуакат.

Тāх луадух, знуакойн правила ягаес йиāў се же, ми и умножиес.

33. Случайт, конза юаттава или ягая оллах нолят.

а) Анна пидāў ягуа 0 мил-тахто числал, примиэракси $+10$-л. Тāмā знуаччиу, что пидāў лŏўдиā мойне числа, кудама пидāў умножиэ $+10$-л, чтобы произведениях суаха 0. Мойне числа он 0 и вай 0, сентāх куй $0\cdot(+10)=0$, а миттўŏн-тахто муун, эй нолян, произведения 10-л эй вой, нāгевāйне, олла ноля.

Тāх луадух лŏўвāммā:

$$0:(-2)=0, \text{ сентāх что } (-2)\cdot 0=0;$$
$$0:\frac{3}{4}=0, \quad „ \quad „ \quad \frac{3}{4}\cdot 0=0 \text{ и м. и.}$$

Значит, **если юаттава он ноля, а ягая эй оле ноля, то частной должен олла ноля.**

б) Олгах нўгŏй, что ягая он ноля, а юаттава миттўйне-тахто муу числа, примиэракси $(+5):0$. Тāмā знуаччиу, что пидāў лŏўдиā мойне числа, кудама пидāў умножиэ 0-л, чтобы родизих $+5$. Но любойн числан умножихуо 0-л, мўŏ эммā суа мууда числуа пайчи 0; значит, частной $(+5):0$ эй оле ни миттўйзен числан суурус. Тāмāн луадух невозможнойт оллах юаннат:

$$(-5):0;\ (+0{,}3):0;\ (-7{,}26):0 \text{ и м. и.}$$

Вообще, **если ягая он ноля, а юаттава эй оле ноля, то юанда он невозможной.**

в) Отамма, яльгимāй, тāмāн мойзен случайн, конза и юаттава он 0 и ягая он 0:

$$0:0=?$$

Тāс случайс тўхьиā он паиста частнойх нāх, сентāх куй любой числа, умножитту нолял, андау результатас нолян.

Примиэракси,

$$5\cdot 0=0;\ 7\cdot 0=0;\ (-100)\cdot 0=0 \text{ и м. и.}$$

Выражениял $\frac{0}{0}$ совиттих эй приписывайя ни миттўйстā численнойда значениюа.

Упражneniят.

40. $(+20):(+4)$; $(+20):(-4)$; $(-20):(+4)$; $(-20):(-4)$.

41. $(+2a):(-2)$; $(-5x):x$; $(-7x^2):(-7)$ **42.** $0:8$; $0:\frac{1}{2}$; $0:0{,}3$; $0:a$.

VII. Умноженнян и юаннан главнойт свойстват.

34. Убедиммоксех примиэройл, что нет умноженнян и юаннан свойстват, кудамат мӳӧ озутимма арифметическолой числой варойн (§§ 8 и 9), йиӓхӓх и относительнолой числой варойн.

а) *Переместительной закона*: **произведения эй мууту сомножителёйн сиёйн ваехтандас.**

Отамма энзимӓй вай кахтен числан умноженияы примиэрой:

$$(+5)\cdot(+2)=+10 \text{ и } (+2)\cdot(+5)=+10;$$
$$(-5)\cdot(+2)=-10 \text{ и } (+2)\cdot(-5)=-10;$$
$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{20} \text{ и } \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=+\frac{9}{20} \text{ и м. и.}$$

Отамма нӱгӧй произведениян, кудамас он энӓмби куй какси сомножителюа, примиэракси, тӓмӓн мойзен: $(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)$. Тӓмӓн произведениян абсолютной величина он $2\cdot5\cdot3$, знуакка же ройх $+$ или $-$, каччоен сих, он-го отрицательнолой сомножителёй чётной вай нечётной числа (миӓн примиэрас знуакка ройх $+$). Если мӳӧ муутамма сомножителёйн сият, примиэракси ненга: $(+3)\cdot(-5)\cdot(-2)$, то суамма уувен произведениян, кудаман абсолютной величина он $3\cdot5\cdot2$, а знуакка ройх $+$ или $-$, каччоен сих, он-го отрицательнолой сомножителёй чётной вай нечётной числа. Но $3\cdot5\cdot2=2\cdot5\cdot3$ (арифметическолойн числойн умножимизен переместительнойда свойствуа мӳӧте), и отрицательнолой сомножителёй йиӓӱ сен же верда, ми оли и энне. Значит, молеммил произведениёйл абсолютной величина ройх ӱкси и се же и знуакат ройтахес ӱхтен мойзет. Сентӓх:

$$(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)=(+3)\cdot(-5)\cdot(-2).$$

б) *Сочетательной закона:* **монен сомножителяи произведения эй мууту, если миттӱӧт-тахто сомножителёйс ваехтамма нийен произведениял.**

Муга, сен сиях чтобы луадиэ умножинда

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)$$

сийт порядкас, миттӱйзес оллах кирьютетут сомножителят, с.о., ненга:

$$(-5)\cdot(+3)=-15, \quad (-15)\cdot(-2)=+30,$$

мӳӧ воймма оттуа любойда какси сомножителюа, примиэракси $+3$ и -2, и ваехтуа нет произведениял, с.о. числал -6, и сен яльгех умножиэ сил числал и колмас сомножителя: $(-5)\cdot(-6)=$ $=+30$. Тӓх луадух:

$$(-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)]=(-5)\cdot(+3)\cdot(-2).$$

в) Чтобы миттӱйне-тахто числа умножиэ монен сомножителян произведениял, вой тӓмӓн числаи умножиэ энзимӓйзел сомно-

жителял, суаду произведения умножиэ тойзел сомножителял и м. и. И юури муга же: чтобы миттӱйне-тахто числа ягуа монен числан произведениял, вой тäмäн числан ягуа энзимäйзел сомножителял, результатан ягуа тойзел сомножителял и м. н.

Муга, чтобы $+10$ умножиэ произведениял $(-2)\cdot(+3)$, мӱö воймма энзимäй чётайя тäмäн произведениян (се он -6) и сен яльгех умножиэ сил $+10$ (суамма -60); но воймма умножиэ $+10$ энзимäй -2 (суамма -20) и сен яльгех суавун произведениян умножиэ $+3$-л (суамма -60). Тäх луадух:

$$(+10)\cdot[(-2)\cdot(+3)]=(+10)\cdot(-2)\cdot(+3).$$

Вообще $a(bc\ldots)=(a.b)c\ldots$.

Муга же:

$$10:[(-2)\cdot(+3)]=[10:(-2)]:(+3),$$

сентäх куй

$$10:[(-2)\cdot(+3)]=10:(-6)=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}.$$

$$[10:(-2)]:(+3)=(-5):(+3)=-\frac{5}{3}.$$

Вообще: $a:(bc\ldots)=(a:b):c\ldots$.

Муга же войби обнаружиэ и распределительнойн законан свойстван справедливостин.

г) Озутамма виэ следующойн юаннан свойстван: **если юаттаван и ягаян умножимма (или юамма ӱхтел и самал числал (пайчи нолюа), то частной эй мууту.**

Куй мӱö наймма энне (§ 9,g), равенства $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ он верной кайкких арифметическолойх числойх нäхте, куй ӱннäллизих муга и дробнолойх. Нӱгöй мӱö провиэримма, что тäмä равенства йиäӱ вернойкси и силлой, конза кай либо эрäхäт букват a, b и m руветах означаймах относительнолой числой.

Отамма миттӱйзен-тахто юаннан примиэран, примиэракси $5:0,8$, и умножимма юаттаван и ягаян, саномма, 3-л. Тäмäн периä частной эй мууту, сентäх куй кай числат оллах арифметическойт, и сентäх мӱö воймма кирьюттуа равенстван:

$$\frac{5}{0,8}=\frac{\cdot}{0,8\cdot 3}=\frac{15}{2,4}.$$

Анна нӱгöй тäс равенствас миттӱйне-тахто числа ройх отрицательнойкси; анна, примиэракси, 5 сиях ройх -5:

$$\frac{-5}{0,8}=\frac{-5\cdot 3}{0,8\cdot 3}=-\frac{15}{2,4}.$$

Равенства ӱксикай яй вернойкси, сентäх куй молембиэн частнолойн абсолютнойт величинат эй муутутту и молеммат нет оллах отрицательнойт числат.

Муга же кебиэ он провиэриэ, что равенства йиаӯ вернойкси и силлой, конза тойзен либо колманнен числан луаимма отрицательнойкси. Значит, миттӯйзиэ положительнолой или отрицательнолой числой мӯӧ буквил a, b и m эммӓ ни разумейччис, равенства $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, айнос йиаӯ вернойкси.

Частной муга же эй мууту юаттаван и ягаян ягамизен периӓ ӯхтел и самал числал, сентӓх куй ягамине он равносильной умножимизел киӓннетӯл числал.

Замиэтимма, однако, что числа, кудамал мӯӧ умножимма (или юамма) юаттаван и ягаян, эй вой олла ноляна, сентӓх куй тӓс случайс (пунктан в) § 33 мугах, частной ройх неопределённой.

Упражнениятт:

43 Убедиэксех провиэриннал, что нӓмӓ равенстват оллах вернойт:

$(-5)\cdot(+2)\cdot(-1)=(+2)\cdot(-1)\cdot(-5)=(+2)\cdot(-5)\cdot(-1)$.

$10\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)=10\cdot[(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)]=10\cdot(-2.)[(-3)\cdot(+5)]$

$[10+(-3)+(-2)]\cdot(-7)=10\cdot(-7)+(-3)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-7)$.

$\left(\frac{3}{4}-0{,}2+\frac{7}{8}\right)\cdot 0{,}3=\frac{3}{4}\cdot 0{,}3-0{,}2\cdot 0{,}3+\frac{7}{8}\cdot 0{,}3$.

44 Куй удобноймбах войби чётайя следующойт произведениятт умножиинан сочетательнойн свойстван основаниял.

$$8\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 125; \qquad 2\cdot 5\cdot 6\cdot 10\cdot 5; \qquad \frac{3}{4}\cdot 8{,}2\cdot 4\cdot 102.$$

45. Провиэриэ, что частной $3{,}5:(-7)$ эй мууту, если мӯӧ юаттаван и ягаян умножимма 4-л. Муга же, если юамма $-0{,}75$-л.

КОЛМАС ОТДИЭЛА.

ЎННĂЛЛИЗЕТ ОДНОЧЛЕННОЙТ И МНОГОЧЛЕННОЙТ ВЫРАЖЕНИЯТ. АЛГЕБРАИЧЕСКОЙТ ДРОБИТ.

I. Алгу понятият.

35. Одночлена и многочлена. Алгебраическойт выражениият ягавутах кахтех группах, каччоен сих, миттўйне алгебраической действия нийс луаитах яльгимăйзекси.

Алгебраическойда выражениюа, кудамас порядкуа мўбте яльгимăйне действия эй оле лизиăндă или пуоленнанда, санотах одночленакси.

Значит, одночлена он либо отдельной буквал или цифрал выразитту числа, примиэракси — a, $+10$, или произведения, примиэракси ab, $(a+b)c$, или частной, примиэракси $\frac{a-b}{c}$, или степени, примиэракси b^2, но **одночлена эй вой олла суммана ни разностина.**

Если одночленуа чётайес пидăў луадиэ юанда действия, то одночленуа санотах *дробнойкси*, если же тăдă эй пиэ луадиэ, санотах *ўннăллизекси*. Муга, одночлена $\frac{a-b}{c}$ он дробной; $(x-y)\cdot ab$, $a(x+b)^2$ — оллах ўннăллизет. Сентăх куй алгебран аллус мўбб рубиэмма пагиземах вай ўннăллизих одночленойх нăх, то лўхеннўксен тăх нийдă мўбб рубиэмма саномах просто „одночленойкси“.

Алгебраическойда выражениюа, кирьютеттуо монес одночленас, ўхтўтеттўлбйс кескенăх + или — знуакойл, санотах многочленакси. Мойне он, примиэракси, выражения:

$$ab - a + b^2 - 10 + \frac{a-b}{c}.$$

Эри выражениёй, кудамиэн ўхтўттăмизес плюс или минус знуакойл лиэни многочлена, санотах сен *членойкси*. Обыкновенно многочленан членой качеллах ўхтес нийен знуакойн ке, кудамат оллах нийен иэс, примиэракси санотах: члена — a, члена $+b^2$ и м. и. Энзимăйзен членан иэс, если сен эдех эй оле пандУ ни миттӯйстӑ знуаккуа, войби подразумевайя знуакан $+$, муга, миӑн примиэрас энзимӑйне члена он ab, или $+ab$.

Выраженнюа, луаиттуо кахтес членас, санотах *двучленакси*, колмес — *трехчленакси* и м. и. Если многочленан кай членат оллах ӯннӑллизет, то и иччиэ многочленуа санотах *ӯннӑллизекси*.

36. Коэфициента. Олгах аннетту произведения:

$$a3ab\ (-2),$$

кудамас эрӑхӑт сомножителят оллах выразитут цифройл, тойзет — буквил. Тӑмӑн мойзет произведеният вой преобразуйя (умножениян сочетательнойн свойстван основал), ӯхтӯтеттӯӧ ӯхтех группах кай буквал a выразитут сомножителят и м. и., суамма:

$$3\cdot(-2)\cdot(aa)\cdot b,$$

мин войби кирьюттуа лӯхемби — $6a^2b$.

Цифройл выразиттуо сомножителюа, кудама он панду буквеннолойн сомножителёйн эдех, санотах одночленан *коэфициентакси*. Муга, одночленас —$6a^2b$ числа — 6 он коэфициента.

Замиэтимма, что если коэфициента он ӯннӑллине положительной числа, то се означайччоу, ӑйян-го кердуа п о в т о р я й ч е х л и з ӑ т т ӑ в ӑ н ӑ се буквенной выражения, кудамах се относих; муга, $3ab$ означайччоу сидӑ же самуа, мидӑ и $(ab)\cdot 3$, с. о. означайччоу суммуа $ab+ab+ab$. Если коэфициента он ӯннӑллине отрицательной числа, то се знуаччиу, ӑйян-го кердуа п о в т о р я й ч е х п у о л е н д а я н а буквенной выражения, кудамах се относих; муга, $-3x$ означайччоу $-x-x-x$. Если коэфициента он дроби, то се выражайччоу сидӑ, м и т т ӯ й н е д р о б и о т е т а х буквеннойн выражениян численнойс величинас. Муга, $\frac{2}{3}ax$ знуаччиу сидӑ же самуа, мидӑ и $ax\cdot\frac{2}{3}$, а числа ax умножиэ $\frac{2}{3}$-л знуаччиу оттуа $\frac{2}{3}$ тӑс числас.

37. Многочленан свойстват. Ёга многочленуа войби каччуо сен членойн алгебраическойна суммана. Примиэракси, многочлена $2a-b+c$ он сумма $2a+(-b)+(+c)$, сентӑх куй выражения $+(-b)$ он равносильной выражениян ке $-b$ и выражения $+(+c)$ означайччоу сидӑ же, мидӑ и $+c$. Тӑмӑн мугах кай относительнолойн числойн свойстват (§ 25) оллах муга же и многочленойл. Мустойтамма какси нийс свойствис:

а) ***Переместительной закона***: **многочленан численной величина эй мууту, сен членойн сиёйн муутандас (нийен знуакойн ке).**

б) ***Сочетательной закона***: **многочленан численной величина эй мууту, если миттӯӧт-тахто сен членат заменимма нийен алгебраическойл суммал.**

Озутамма виэ многочленан следующойн свойстван:

в) Если многочленан ёга членан нэс муутамма знуакан вастаккайзекси, то многочленан численной величина муга же мууттау знуакан вастаккайзекси, а сен абсолютной величина эй мууту.

Примиэракси, многочленан $2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a$ численной величина он:

$$2 \cdot (-4)^2 - (-4) \cdot (-3) + (-3)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) =$$

$= 2 \cdot 16 - 12 + 9 + 2 = 32 - 12 + 9 + 2 = 31$, если $a = -4$ и $b = -3$, а нийл же буквиэн значениейл многочленан $-2a^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a$ численной величина он:

$$-2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot (-3) - (-3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-4) =$$

$$= -2 \cdot 16 + 12 - 9 - 2 = -32 + 12 - 9 - 2 = -31.$$

Упражненият.

46. Упростиэ следующойт произведенният:

$ax\,10\,xaax$; $aa(-5) \cdot bxx(+2)$; $ab \cdot \frac{3}{4} \cdot axx\left(-\frac{1}{2}\right)$; $5mxy\,(-4)\,mxyy$.

47. Кирьюттуа сумман выражениият: $2a$; $3ax$; $5a^2b$; $4(a+1)$.

48. Чётайя одночлена:

$7a^2bc$, если $a = 3$, $b = 2$, $c = \frac{5}{7}$;

$0{,}8a\,(b + c)$, если $a = 1$, $b = \frac{5}{6}$, $c = 0{,}25$;

$3\,(a + b)^2c$, если $a = 1$, $b = \frac{5}{6}$, $c = 0{,}25$;

$-7x^2y^3$, если $x = -2$, $y = 1$;

$0{,}52ax^2y$, если $a = 100$, $x = -3$, $y = -2$.

49. Чётайя многочленат:

$2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 1$, если $x = 1$, если $x = 2$;

$ax^2 + bx + c$, если $a = 3$, $b = -2$, $c = -5$, $x = 1$.

50. Провиэриннан авул убедиэксех, что какси многочленуа: $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ и $-x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ аннетах числат, ўхтен мойзет абсолютнойда величинуа мўёте, но вастаккайзет знуаккой мўёте, если $x = 2$.

38. Подобнолойн членойн привединда. *Многочленан членой, кудамат отличайяхес тойне тойзес вай коэффициентойл или знуакойл, или даже вовсе эй отличайяхес ни мил, санотах подобнолойкси.*

Примиэракси многочленас:

$$\underline{4a} - \underline{\underline{3x}} + \underline{0{,}5a} + \underline{\underline{8x}} + 3ax - \underline{\underline{2x}}$$

энзимäйне члена он подобной колманнел (нет оллах подчеркнитут ўхтел чертал), тойне члена он подобной неллäннел и куувеннел (нет оллах подчеркнитут кахтел чертал), а вийеннел членал подобнолой эй оле.

Если многочленас вастаувутах кескенӓх подобнойт членат, то нет войби ӱхтӱттиӓ ӱхтекси членакси многочленан сочетательнойн свойстван основаниял. Муга, васта туодус примиэрас мӱӧ воймма ӱхтӱттиӓ членат ненгомих групиих:

$$(4a+0{,}5a)+(-3x+8x-2x)+3ax.$$

Но он нӓгевӓйне, что 4 миттӱйстӓ-тахто числуа плюс 0,5 мойста же числуа, составляйях 4,5 тӓдӓ же числуа. Значит, $4a+0{,}5a=4{,}5a$. Муга же $-3x+8x=5x$ и $5x-2x=3x$. Значит, многочленан войби кирьюттуа ненга:

$$4{,}5a+3x+3ax.$$

Многочленан кайккиэн подобнолойн членойн ӱхтӱттӓмистӓ ӱхтех членах санотах многочленан подобнолойн членойн приведимизекси.

Замечания. Какси подобнойда членуа, кудамиэн коэфициентат отличайяхес вай знуакойл, кескенӓх хӓвитӓх; мойзет оллах, примиэракси, членат: $2a$ и $-2a$ или $-\frac{1}{2}x^2$ и $+\frac{1}{2}x^2$.

Примиэрат:

1. $a+5mx-2mx+7mx-8mx=a+2mx.$
2. $4ax+b^2-7ax-3ax+2ax=-4ax+b^2=b^2-4ax.$
3. $4a^2b^3-3ab+0{,}5a^2b^3+3a^2c+8ab=4{,}5a^2b^3+5ab+3a^2c.$

Упражненият.

51. $a^3x^2+3a^2x^3+\frac{1}{2}a^2x^3+a^2x^3.$

52. $2x-5xy-8xy-3{,}1xy-0{,}2xy.$

53. $a+8mxy^2-4\frac{1}{2}mxy^2.$ **54.** $a-8mxy^2+4\frac{1}{2}mxy^2.$

55. $5a^3-7a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b.$

56. $x^5-4ax^4-2ax^4+2a^2x^3+5ax^4-2a^2x^3+ax^4-7a^2x^3.$

Историческойт сведеният.

Отрицательнойт числат вастаувутах ё греческойл математикал Диофантал (миян эран IV в.), но хӓн называйччоу нийдӓ „недопустимолойкси“ и эй анна нийл значениюа задуаччой решшиес. Однако сиэ, кус пидӓӱ умножиэ кескенӓх какси минус знуаккахиста числуа, хӓн пользуйчех миӓн правилан мойзел правилал. Хӓн саноу: „пуоленнеттава числа, умножигту пуоленнеттавал, андау лизӓттӓвӓн числан“. Муга, хӓн суау:

$$(7-3)\cdot(5-2)=7\cdot5-7\cdot2-3\cdot5+3\cdot2=12.$$

Индусской математикка Брамагупта (620 в.) андау ё подробнойн относительнолойн числойн лизиӓннӓн и пуоленнаннан правилойн переченян. Туомма эрӓхиэ нийлӧйс.

„Кахтен имуществан сумма он имущества", с. о. примиэракси, $(+2)+$
$+(+3)=5$.

„Кахтен веллан сумма он велга", с. о. $(-2)+(-3)=-5$.

„Имуществан и веллан сумма он нийен разностин суурус с. о. $(+5)+$
$+(-7)=-2$.

„Велга, пуоленнетту ноляс, мууттуу имуществакси, а имущества — веллакси": $0-(-3)=+3$; $0-(+3)=-3$ и м. и.

Европас виэ 1544 в. математикка Штифель называйччоу отрицательнолой числой „нелеполойкси". Жирар омас сочиненияс ё пользуйчех отрицательнолойл числойл (1629 в.), но лопуллизести математиках нет той Декарт (1637 в.), кудама и об'ясни нийен смыслан куй направлённолойна величинойна. Энне лизияндя и пуоленнанда действиейн обозначайндах нähте употребляйдих полностью латинсколой саной *plus* и *minus*, кудамат яллес оли лӱхеннеттӱ ӱхтех буквах p и m суате чёрточкан ке ӱлäхäл.

II. Алгебраической лизиäндä и пуоленнанда.

39. Одночленойн лизиäндä. Олгах лизäттäвä эрäхиэ одночленой: $3a$; $-5b$; $+0{,}2a$; $-7b$ и c.

Нийен сумма выразих ненга:

$$3a+(-5b)+(+0{,}2a)+(-7b)+c.$$

Но выраженият $+(-5b)$, $+(+0{,}2a)$ и $+(-7b)$ оллах равносильнойт выражениейл: $-5b$, $+0{,}2a$ и $-7b$; сентäх аннеттулойн одночленойн сумман войби кирьюттуа уувессах простоймби ненга:

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0{,}2a}-\underline{\underline{7b}}+c,$$

кудама подобнолойн членойн приведихуо андау:

$$3{,}2a-12b+c.$$

Правила. **Чтобы лизäтä мони одночлеиуа, пидäӱ иет кирьюттуа тойне тойзеи яльгех нийен знуакойн ке и луадиэ подобнолойн членойн привединда.**

40. Многочленойн лизиäндä. Анна миттӱöх-тахто алгебраической выражениях, кудаман мӱö обознуачимма ӱхтел буквал m, пидäӱ лизäтä многочлена $a-b+c$. Эчиттäвäн сумман войби выразиэ ненга:

$$m+(a-b+c).$$

Чтобы мууттуа тäмä выражения, отамма вниманиях, что многочлена $a-b+c$ он сумма $a+(-b)+c$; но чтобы лизäтä сумма, вой лизäтä ёга лизäттäвäн эриже тойне тойзен яльгех. Сентäх:

$$m+(a-b+c)=m+a+(-b)+c.$$

Но лизäтä $-b$ он ӱхтен мойне, куй пуолендуа b; сентäх:

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c.$$

Правила. **Чтобы миттӱӧх-тахто алгебраическойх выражениях лизäтä многочлена, пидäӱ кирьюттуа тäх выражениях многочленан кай членат ӱкси тойзен яльгех нийен знуакойн ке и луадиэ подобнолойн членойн привединдä, если нийдä он.**

Если энзимäйзен членан иэс знуаккуа эй оле, то подразумевайях $+$.

Примиэра. $3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)$.

Алгебраической выражения, кудаман энне мӱӧ обозначимма ӱхтел буквал m, тäс примиэрас он аннетту многочленана $3a-$ $-5ab+b^2$. Озутетун правилан применихуо, суамма:

$$3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)=$$
$$=3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2=10a^2-ab.$$

Замечания. Если лизиäндäх нäхте аннеттулойс многочленойс он подобнолой членой (куй миäн примиэрас), то лизäттäвäт вой кирьюттуа тойне тойзен ал муга, чтобы подобнойт членат олдайс подобнолойн ал:

$$\begin{array}{r} 3a^2-5ab+b^2 \\ +\,7a^2+4ab-b^2 \\ \hline 10a^2-ab \end{array}$$

Упражненият.

Лизäтä следующойт многочленат ӱхтех, кирьюттаен нет тойне тойзен ал подобнойт подобнолойн ал):

57. $(2x-y-z)+(2y+z-x)+(2z-x-y)$.
58. $(3x^3-4x^2+2x-1)+(2x^2-3x+4)+(x^3-2+4x+3x^2)$.
59. $4a^3-5a^2b+7ab^2-9b^3)+(-2a^3+4a^2b-ab^2-4b^3)+(8ab^2-10a^2b+$ $+6a^3+10b^3)$.

41. **Одночленойн пуоленнанда**. Пидäккäх одночленас $10ax$ пуолендуа $-3ax$. Эчиттäвä разности выразих ненга:

$$10ax-(-3ax).$$

Числан $-3ax$ пуолендамине тäмäн действиян правилан мугах войби ваехтуа числан $-3ax$ вастаккайзен числан лизиäннäл. Мойне числа он $+3ax$, сентäх:

$$10ax-(-3ax)=10ax+(+3ax)=10ax+3ax=13ax).$$

Правила. **Чтобы пуолендуа одночлена, пидäӱ кирьюттуа се пуоленнеттавах вастаккайзен знуакан ке и луадиэ подобнолойн членойн привединда, если нийдä он.**

42. **Многочленан пуолендамине**. Пидäккäх миттӱйзес-тахто алгебраическойс выраженияс, кудаман мӱӧ обозначимма бук-

вал m, пуолендуа многочлена $a-b+c$, мин войби обознуаччиэ ненга:

$$m-(a-b+c).$$

Тäх нäхте пуоленнанда правилан мугах пидäў вай m-х лизäтä числан $a-b+c$ вастаккайне числа. Мойне числа он $-a+b-c$; значит:

$$m-(a-b+c)=m+(-a+b-c).$$

Применихуо многочленойн лизиäннäн правилуа, суамма:

$$m-(a-b+c)=m-a+b-c.$$

Правила. **Чтобы миттўöс-тахто алгебраическойс выражениияс пуолендуа многочлена, пидäў тäх выражениях кирьюттуа пуолендаяи многочленаи кай членат вастаккайзиэи зиуакойи ке и луадиэ подобиолойи члеиойн приведиида, если нийдä он.**

Замечания. Если пидäў пуолендуа ўкси многочлена тойзес многочленас и нäмис многочленойс он подобнолой членой, то пуолендаян многочленан вой кирьюттуа пуоленнеттаван ал, мууттаен пуолендаян знуакат вастаккайзикси и муга, чтобы подобнойт членат олдайс подобнолойн ал. Примиэракси, пуоленнанда $(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2+4ab-2b^2)$ он парас кирьюттуа ненга:

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+b^2 \\ -5a^2-4ab+2b^2 \\ \hline 2a^2-6ab+3b^2 \end{array}$$

Упражнениям.

60. $(2p^2-4p+8)-(p^2-5p-7)$.
61. $4x^2+y^2+5$-с пуолендуа $-2y^2+y+6$.
62. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+1$-с пуолендуа $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}$.
63. Упростиэ выражения:

$$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2).$$

43. Скобкиэн, кудамиэн иэс он знуакка $+$ или $-$, авуамине. Пидäккäх выражениияс

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c)$$

авата скобкат. Тäмä пидäў эллендиä муга, что скобкиэн сўдäмес олиёйн многочленойн ке пидäў луадиэ нет действият, кудамат он озутетту скобкиэн иэс олиёйл знуакойл. Миäн примиэрас энзимäйзиэн скобкиэн иэс он знуакка $+$, тойзиэн иэс знуакка $-$. Луадихуо лизиäннäн и пуоленнаннан мейл аннеттулойн правилойн мугах, суамма выражениян скобкитта:

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c.$$

Тӑх луадух, аватес скобкиэ, кудамиэн иэс он знуакка $+$, мейл эй пиэ мууттуа знуаккой скобкиэн судӑмес, а аватес скобкиэ, кудамиэн иэс он знуакка $-$, мейл пидӑу скобкиэн сӳдӑмес олиян ёга членан иэс мууттуа знуакка вастаккайзекси.

Пидӑккӑх виэ авата скобкат выраженияс:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Кайккиэ удобноймби он энзимӑй авата **круглойт** скобкат, а сен яльгех **квадратнойт**:

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

44. Многочленан вуйтин салбуанда скобких. Многочленан преобразуйндуа варойн тойчи он полезно эрӑхиэ сен членой салвата скобких, причём скобкиэн эдех тойчи он желательно панна знуакка $+$, с. о. изобразиэ многочлена суммана, а тойчи знуакка $-$, с. о. изобразиэ многочлена разностина. Пидӑккӑх, примиэракси, многочленас $a + b - c$ салвата скобких какси яльгимӑйстӑ членуа, кирьюттаен нийен эдех знуакан $+$. Силлой кирьютамма ненга:

$$a + b - c = a + (b - c),$$

с. о. скобкиэн сӳдӑмес ёга **членал** ятӑммӑ сен же знуакан, кудама сил **оли**. Что **тӑмӑн** мойне преобразования он верно, убедиммоксех, если авуамма скобкат **лизиӑннӑн** правилан мугах; силлой суамма яриллех аннетун многочленан.

Пидӑккӑх сийт же многочленас салвата скобких какси яльгимӑйстӑ членуа, кирьюттаен скобкиэн эдех знуакан $-$. Силлой кирьютамма ненга:

$$a + b - c = a - (-b + c) = a - (c - b),$$

с. о. скобкиэн сӳдӑмес муутамма знуакан ёга членан иэс вастаккайзекси. Что ненгойне преобразования он верно, убедиммоксех, если авуамма скобкат пуоленнаннан правилан мугах; силлой суамма яриллех аннетун многочленан.

Войби и кайкен многочленан салвата скобких, кирьюттаен скобкиэн эдех знуакан $+$ или $-$. Примиэракси, многочленан $a + b - c$ войби кирьюттуа ненга:

$$+(a + b - c), \text{ или } -(-a - b + c).$$

Упражненият.

Авата скобкат и упростиэ:

64. $x + [x - (x - y)]$; $m - \{n - [m + (m - n)] + m\}$.

65. $a + b - c - [a - (b - c)] - [a + (b - c) - (a - c)]$.

66. $(3x^2-4y^2)-(x^2-2xy-y^2)+[2x^2+2xy+(-4xy)+3y^2]$.

67. Многочленас $a-b-c+d$:

а) салвата скобких колме яльгимӓйстӓ членуа, кирьюттаен скобкиэн эдех знуакан —;

б) салвата скобких какси яльгимӓйстӓ членуа, кирьюттаен скобкиэн эдех знуакан +;

в) салвата скобких какси кескимӓйстӓ членуа, кирьюттаен скобкиэн эдех знуакан —.

III. Алгебраической умножинда.

45. Одночленойн умножинда. а) Пидӓккӓх a^3 умножиэ a^2-л, мин вой обознуаччиэ ненга: $a^3 \cdot a^2$, или подробноймби: $(aaa)\cdot(aa)$. Тӓс произведения aaa умножайчех тойзел произведениял aa. Но, чтобы миттӱйне-тахто числа умножиэ произведениял, войби тӓмӓн числан умножиэ энзимӓйзел сомножителял, суаду результатта умножиэ тойзел сомножителял и м. и. Сентӓх:

$$a^3 \cdot a^2 = (aaa)\cdot(aa),$$

мин вой кирьюттуа и скобкитта, сентӓх куй действиёйн порядка йиӓӱ и скобкитта се же, миттӱйне озутетах собкат:

$$a^3 \cdot a^2 = aaaaa = a^5.$$

Мӱӧ нӓеммӓ, что произведениян степенин озуттая он сомножителёйн степениёйн озуттаиэн сумман суурус.

Отамма виэ примиэран: x^3 умножимма x^4-л. Рассуждайен муга, куй и предыдущойс случайс, суамма:

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx)\cdot(xxxx) = xxxxxxx = x^7.$$

Вообще, a^m произведения a^n-л ройх:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Значит, ӱхтен и саман числан степениёйн произведения он тӓмӓн числан сен мойзен степенин суурус, кудамал степенин озуттая он перемножайдавиэн степениёйн озуттаиэн сумман суурус. Тӓмӓ лӱхемби выражайях ненга:

Ӱхтен и саман числан степениёй умножиес нийен степениёйн озуттаят лизӓтӓх ӱхтех.

Тӓх луадух:

$$m^2m^3 = m^5;\ x^3x = x^4;\ y^2yy^3 = y^6.$$

б) Пидӓккӓх умножиэ

$$3ax^2\cdot(-5abx).$$

Сентӓх куй одночлена $-5abx$ он произведения, то пидӓӱ вай множимой умножиэ энзимӓйзел сомножителял — 5-л, результатта умножиэ тойзел сомножителял a и м. и. Значит:

$$3ax^2\cdot(-5abx) = 3ax^2\cdot(-5)\cdot abx.$$

Пользуйччиудуен умножениян сочетательнойл свойствал, тäс произведенияс группируйчемма сомножителят ненгомих группих:

$$(+3)\cdot(-5)\cdot(aa)\cdot b\cdot(x^2x).$$

Луадихуо умножениян ёга групас, суамма: $-15a^2bx^3$.

***Правила.* Чтобы одночлена умножиэ одночленал, пидäӳ умножиэ нийен коэфициентат, лизäтä ӳхтен мойзиэн буквиэн степениейн озуттаят, а нет букват, кудамат оллах вай множимойс или вай множителяс, сийрдиä произведениях нийен степенин озуттаиэн ке.**

Примиэрат.

1. $0{,}7a^3x\cdot(3a^4x^2y^2)=2{,}1a^7x^3y^2$. 2. $-3{,}5x^2y\cdot\left(\frac{3}{4}x^3\right)=-\frac{21}{8}x^5y$.

46. Одночленан квадратта и куба. Мӳö тийяммä, что ностуа квадраттах или кубах миттӳйне-тахто числа, знуаччиу оттуа се сомножителяна какси или колме кердуа; примиэракси:

$$11^2=11\cdot11=121;\ \left(-1\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4};$$
$$4^3=4\cdot4\cdot4=64;\ (-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125.$$

Применимма тäдä определениюа ӳннäллизиэ одночленой ностаес квадраттах и кубах.

1. Пидäккäх a^4 ностуа квадраттах или кубах. Определениян мугах:

$$(a^4)^2=a^4\cdot a^4;\ (a^4)^3=a^4\cdot a^4\cdot a^4.$$

Одночленойн умножениян правилан применихуо, суамма:

$$(a^4)^2=a^8;\ (a^4)^3=a^{12}.$$

Юури муга же:

$$(a^3)^2=a^6;\ (a^3)^3=a^9.$$

Вообще:

$$(a^m)^2=a^m\cdot a^m=a^{2m};\ (a^m)^3=a^m\cdot a^m\cdot a^m=a^{3m},$$

т. о. чтобы ностуа квадраттах или кубах степени, пидäӳ степении озуттая соответственно умножиэ кахтел или колмел.

Муга:

$$(4^2)^2=4^4=256;\ (2^2)^3=2^6=64 \text{ и м. и.}$$

2. Пидäккäх ностуа квадраттах или кубах произведения abc. Определениян мугах:

$$(abc)^2=(abc)\cdot(abc);\ (abc)^3=(abc)\cdot(abc)\cdot(abc).$$

Умножениян свойстван применихуо, суамма:

$$(abc)^2=abcabc=(aa)\cdot(bb)\cdot(cc)=a^2b^2c^2;$$
$$(abc)^3=abcabcabc=(aaa)\cdot(bbb)\cdot(ccc)=a^3b^3c^3,$$

с. о. чтобы произведения ностуа квадраттах или кубах, пидӑӱ тӑх степеиих иостуа ёга сомиожителя эриже и результатат умиожиэ кескеиӑх.

Муга:

$$(2\cdot3\cdot5)^2 = 2^2\cdot3^2\cdot5^2 = 4\cdot9\cdot25 = 900;$$
$$(2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3 = 8\cdot27 = 216.$$

3. Пидӑккӑх нӱгӧй ностуа квадраттах или кубах одночлена $-4a^3bc^4$. Применихуо васта вай выведиттулой правилой, суамма:

$$(-4a^3bc^4)^2 = (-4)^2\cdot(a^3)^2\cdot(b)^2\cdot(c^4)^2 = 16a^6b^2c^8;$$
$$-4a^3bc^4)^3 = (-4)^3\cdot(a^3)^3\cdot(b)^3\cdot(c^4)^3 = -64a^9b^3c^{12}.$$

Правила. 1. **Чтобы иостуа квадраттах ӱиийллиие одиочлеиа, пидӑӱ иостуа квадраттах одночлеиаи коэфициеита, а буквиэи степеиии озуттаят умиожиэ кахтел.**

2. **Чтобы иостуа кубах ӱииӑллине одиочлеиа, пидӑӱ иостуа кубах одиочлеиан коэфициеита, а буквиэн степении озуттаят умиожиэ колмел.**

47. Многочленан умножинда одночленал. Олгах аннетту умножиэ многочлена $a+b-c$ миттӱйзел-тахто алгебраическойл выраженияЛ, примиэракси одночленал, кудаман мӱӧ обознуачимма буквал m:

$$(a+b-c)\cdot m.$$

Умножениян распределительнойда законуа применяйен, мӱӧ суамма:

$$(a+b-c)\cdot m = am+bm-cm.$$

Правила. **Чтобы миогочлеиа умиожиэ одиочлеиал, пидӑӱ умножиэ тӑл одиочлеиал миогочлеиан ёга члена и суавут произведеиият лизӑтӑ ӱхтех.**

Сентӑх куй произведения эй мууту сомножителёйн сиёйн ваехтандас, то тӑдӑ правилуа вой применяйя и одночленуа умножиес многочленал. Тӑх луадух:

$$m(a+b-c) = ma+mb-mc.$$

Примиэрат.

1. $(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax)$.

Тӑс многочленан членойн умножинда аннетул одночленал пидӑӱ луадиэ одночленойн умножениян правилан мугах, оттаен вниманиях и знуакойн правилан: ӱхтен мойзет знуакат умножиес аннетах $+$, а разнойт знуакат аннетах $-$.

Умножимма эриже многочленан ёга членан одночленал $-4ax$:

$$(3x^2)(-4ax) = -12ax^3;\ (-2ax)(-4ax) = +8a^2x^2;$$
$$(+5a^2)(-4ax) = -20a^3x.$$

Нӱгӧй, суадулойн результатойн лизäттӱӧ, суамма, **что:**

$$(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax)=-12ax^3+8a^2x^2-20a^3x.$$

2. $(a^2-ab+b^2)(3a)=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=$
$$=3a^3-3a^2b+3ab^2.$$

3. $(7x^2+\frac{3}{4}ax-0{,}3)(2{,}1a^2x)=(7x^2)(2{,}1a^2x)+\left(\frac{3}{4}ax\right)(2{,}1a^2x)-$
$$-0{,}3(2{,}1a^2x)=14{,}7a^2x^3+1{,}575a^3x^2-0{,}63a^2x.$$

4. $2a(3a-4ax+\frac{1}{2}x^2)=6a^2-8a^2x+ax^2.$

48. Многочленан умножинда многочленал. Анна пидäӱ умножиэ многочлена $a+b-c$ многочленал $m-n$, мин вой кирьюттуа ненга:

$$(a+b-c)(m-n).$$

Качеллен множителюа $(m-n)$ ӱхтенä числана (одночленана), применимма многочленан одночленал умножиннан правилуа:

$$(a+b-c)(m-n)=a(m-n)+b(m-n)-c(m-n).$$

Суавун многочленан ёга члена он одночленан произведения многочленал. Применяйен опять предыдущойда правилуа, суамма:

$$(am-an)+(bm-bn)-(cm-cn).$$

Скобкиэн аваттуо лизиäннäн и пуоленнаннан правилойн мугах, лопуллизести лӧӱвäммä:

$$(a+b-c)(m-n)=am-an+bm-bn-cm+cn.$$

Правила. **Чтобы умножиэ многочлена многочленал, пидäӱ умножиэ энзимäйзен многочленан ёга члена тойзен многочлеиан ёга членал и суавут произведеният лизäтä ӱхтех.**

Тиэттäвäйне, энзимäйзен многочленан членой умножиес тойзен многочленан членойл, пидäӱ руководствуйяксех знуакойн правилойл: ӱхтен мойзет знуакат аннетах $+$, разнойт знуакат $-$.

Примиэракси:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(a^3-3ab^2+b^3).$$

Умножимма энзимäй множимойн кай членат множителян энзимäйзел членал:

$$(a^2-5ab+b^2-3)a^3=a^5-5a^4b+a^3b^2-3a^3.$$

Сен яльгех множимойн кай членат умножимма множителян тойзел членал:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(-3ab^2)=-3a^3b^2+15a^2b^3-3ab^4+9ab^2.$$

Иэллех, умножимма множителян колманнел членал:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(+b^3)=a^2b^3-5ab^4+b^5-3b^3.$$

Лопукси, лизиäммä кай суавут произведеният и приведимма подобнойт членат: лопуллине результатта лиэнӧӱ:

$$a^5-5a^4b-2a^3b^2-3a^3+16a^2b^3-8ab^4+9ab^2+b^5-3b^3.$$

Примиэрат.

1. $(a-b)(m-n-p)=am-bm-an+bn-ap+bp.$
2. $(x-y^2)(x+y)=x^3-xy^2+x^2y-y^3.$
3. $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a\,n^2-$
$-10an^3+20a^3n=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n.$
4. $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)(2a^2-3)=(2a^2)^2-3(2a^2)-(2a^2)3+9=$
$=4a^4-6a^2-6a^2+9=4a^4-12a^2+9.$

Упражненият.

68. $(5a^2b^3)(3ab^4c)$; $\left(\frac{3}{4}ax^3\right)\left(\frac{5}{6}ax^3\right)$.

69. $(0.3abx)(2{,}7a^2bx^2)$; $(7a^2b^4c)(3ab^3c^2)\left(\frac{1}{21}a^3b\right)$.

70. $\left(\frac{3}{7}mx^2y^3\right)^2$; $(2a^3bx^2)^3$.

71. $(0{,}1x^my^3)^2$; $\left(\frac{1}{2}m^2ny^3\right)^3$.

72. $(3a^2-2b^3+c)\,2ab$.

73. $(5a-4a^2b+3a^3b^2-7a^4b^3)\,5a^2b$.

74. $(a+b-c)(m-n)$; $(2a-b)(3a+b^2)$.

75. $\left(a+\frac{1}{2}b\right)(2a-b)$; $(x^2+xy+y^2)(x-y)$.

76. $(x^2-xy+y^2)(x+y)$.

77. $(2x+3y)(3x-2y)$; $(y-1)(y^3+y^2+y+1)$.

49. Азететту многочлена. Азеттуа многочлена миттӱӧн-тахто букван степениэ мӱӧте, знуаччиу кирьюттуа сен членат мойзес последовательностис, чтобы тäмäн букван озуттаят сууреттайс или пиэнеттäйс энзимäйзес членас яльгимäйзех. Муга, многочлена $1+2x+3x^2-x^3$ он азететту букван x *сууренийӧ степенийӧ* мӱӧте. Се же многочлена ройх азететту букван x *пуоленийӧ степенийӧ* мӱӧте, если кирьютамма сен членат обратнойс порядкас: $-x^3+3x^2+2x+1$.

Буквуа, кудамуа мӱӧте он азететту многочлена, санотах сен *главнойкси* буквакси. Членуа, кудамас он главной буква сууримман степенин озуттаян ке, санотах многочленан *коргеиммакси членакси*; членуа, кудамас он главной буква пиэнимäн степенин озуттаян ке или вовсе эй оле степенин озуттаюа, санотах многочленан *алимайзекси членакси*.

50. Азететтулойн многочленойн умножинда он удобной **луадиэ муга,** куй ройх озутетту следующойс примиэрас.

$3x-5+7x^2-x^3$ умножиэ $2-8x^3+x$.

Молембиэн многочленойн азеттахуо букван x пуолениёй степениёй мӱёте, кирьютетах множителя множимойн ал и кийлӧйн ал веетӓх черта:

$$
\begin{array}{r}
-x^3+7x^2+3x-5 \\
-8x^2+\ x+2 \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 \qquad\qquad \\
-\quad x^4+\ 7x^3+\ 3x^2-5x \qquad \\
-\ 2x^3+14x^2+6x-10 \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+\ x-10
\end{array}.
$$

Множимойн кай членат умножитах множителян энзимӓйзел членал ($-8x^2$-л), и суаду произведения кирьютетах чертан ал. Умножитах сен яльгех множимойн кай членат множителян тойзел членал ($+x$-л), и суаду тойне произведения кирьютетах энзимӓйзен ал муга, чтобы подобнойт членат олдайс подобнолойн ал. Муга же поступайях и иэллех. Яльгимӓйзен произведениян ал веетӓх черта, кудаман ал кирьютетах тӓӱзи произведения, лизӓтен ӱхтех кай эри произведеният:

Войби молеммат многочленат азеттуа и суурениёйн степениёйн мугах и сен яльгех луадиэ умножинда сийт порядкас, куй оли васта озутетту.

51. Произведениян коргейн и алин членат. Васта качотус примиэрас следуйччоу:

Произведениян коргейн члена равняйчех множимойн и множителян коргеймбиэн членойн произведениял;

Произведениян алин члена равняйчех множимойн и множителян алимайзиэн членойн произведениял.

Сентӓх куй произведениян кайкил досталилойл членойл лиэнӧӱ главнойн букван озуттая пиэнемби, куй коргеймmас членас, и сил же айгуа суурембн, куй алимайзес членас, то произведениян коргеиммал и алимайзел членойл эй вой олла подобнолой членой.

Досталит произведениян членат войях лиэтӓ монен подобнойн членан ӱхтӱттӓмизес ӱхтех членах. Вой даже случчиэксех, что произведениис, подобнолойн членойн ӱхтӱттӓмизен яльгех хӓвитӓх кай членат, пайчи коргиэмбуа и алимайста, куй тӓмӓ нӓгӱӱ следующойс примиэрас:

$$
\begin{array}{r}
x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \qquad \\
x-a \qquad \\
\hline
x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \qquad\qquad \\
-ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\
\hline
-a^5=x^5-a^5
\end{array}.
$$

52. Произведениян членойн лугу. Анна множимойс он 5 членуа, а множителяс 3 членуа. Умножихуо множимойн ёга членан множителян энзимӓйзел членал, мӱӧ суамма произведениян 5 членуа; умножихуо сен яльгех множимойн ёга членан множителян тойзел членал, мӱӧ суамма виэ произведениян 5 членуа и м. и.; значит произведениях ройх кайккиэдах $5 \cdot 3$, с. о. 15 членуа. Вообще, **произведениян членойн лугу подобнолойн членойн привединизех суате он произведениян суурус, кудама он получитту множимойн лувун умножиндас множителян лувул.**

Сентӓх куй произведениян коргеиммал и алимайзел членойл эй вой олла иччех ке подобнолой членой, а кай муут членат войях хӓвитӓ, то **кахтен или энӓммӓн многочленан произведенияс подобнолойн членойн привединизен яльгех членойн лугу эй вой олла пиэнемби кахта.**

Упражнениат.

Азеттуа многочленат букван x пуолениейн степениейн мугах и умножиэнет:

78. $24x + 6x^2 + x^3 + 60$ и $12x - 6x^2 + 12 + x^3$.
79. $(x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)$.
80. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$.

53. Двучленойн умножиннан эрӓхӓт формулат. Он полезно мустойттуа тӓмӓн мойзет двучленойн умножиннан формулат.

а) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Примиэракси:

$17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289$.

Тӓх луадух, **кахтен числан сумман квадратта он ӱхтен суурус куй энзимӓйзен числан квадратта плюс энзимӓйзен и тойзен числан каксинкердайне произведения плюс тойзен числан квадратта.**

б) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Примиэракси:

$19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$.

Тӓх луадух, **кахтен числан разностин квадратта он ӱхтен суурус куй энзимӓйзен числан квадратта минус энзимӓйзен и тойзен числан каксинкердайне произведения и плюс тойзен числан квадратта.**

в) Сентӓх куй кахтен числан разностин войби предстуавиэ алгебраическойна суммана, то молеммат васта санотут правилат вой ӱхтӱттиӓ ӱхтех и выразиэ ненга:

Двучленан квадратта он ӱхтен суурус куй энзимӓйзен членан квадратта плюс энзимӓйзен и тойзен членан каксинкердайне произведения плюс тойзен членан квадратта.

Пидäў вай муйстуа, что квадраттах ностеттаван двучленая ёга члена пидäў оттуа оман знуакан ке.

Примиэракси:

1. $(2ab-c^2)^2=(2ab)^2+2(2ab)(-c^2)+(-c^2)=4a^2b^2-4abc^2+c^4$.
2. $(-m+3n^3)^2=(-m)^2+2(-m)(3n^3)+(3n^3)^2=m^2-6mn^3+9n^6$.

г) $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

Примиэракси:

$25\cdot15=(20+5)\cdot(20-5)=20^2-5^2=400-25=375$.

Тäх луадух, кахтен числан сумма, умножитту нийен разностил он ўхтен суурус куй нäйен числойн квадратойн разности.

54. Нäйен формулойн применяйнда. Нäйен формулойн авул тойчи многочленсйн умножениян войби луадиэ простоймби, куй обыкновеннойл способал.

Примиэрат.

1. $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\cdot1+1^2=16a^6-8a^3+1$.
2. $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$.
3. $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=$
$=(x+1)^2-y^2=x^2+2x+1-y^2$.
4. $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=$
$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2$.

Упражненият.

81. $(a+1)^2$; $(1+2a)^2$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

82. $(3a^2+1)^2$; $(0{,}1mx+5x^2)^2$.

83 $(5a-2)^2$; $(3x-2a)^2$; $\left(3a^2-\frac{1}{2}\right)^2$.

84. Пользуйччиудуен формулойл $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$ варойн лоўдиа следующойт квадратат: 101^2, 997^2; 96^2; 57^2; 72^2; 89^2.

85. $(2m-3n^2)$, $(3a^2x-4ay)^2$; $\left(0{,}2x^3-\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2$.

86. $\left(\frac{1}{2}x^2-3\frac{1}{2}x\right)^2$; $(0{,}25p-0{,}2q)^2$.

87. $(a+1)(a-1)$, $(2a+5)(2a-5)$.

88. $(2x-3)(3+2x)$; $(a^2+1)(1-a^2)$.

Лоўдиа луухембах следующойт произведеният:

89. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$; $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$.

90. $(m+n-p)(m+n+p)$. $[a+(b-c)][a-(b+c)]$.

55. Кахтен числан сумман и разностин куба. Двучленойн умножинда формулойх лизнäммä виэ какси тäмäн мойста формулуа:

а) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+\underline{a^2b}+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

с. о. кахтен числан сумман куба он ӱхтен суурус куй энзимӓйзен числан куба плюс энзимӓйзен числан квадратан и тойзен числан колминкердайне произведения плюс энзимӓйзен числан и тойзен числан квадратан колминкердайне произведения плюс тойзен числан куба.

Примиэракси:

$$11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3\cdot 10^2\cdot 1 + 3\cdot 10\cdot 1^2 + 1^3 = \\ = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331.$$

б) $$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = \\ = a^3 - \underline{2a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} - \underline{a^2b} + \underline{\underline{2ab^2}} - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

с. о кахтен числан разностин куба он ӱхтен суурус куй энзимӓйзен числан куба минус энзимӓйзен числан квадратан и тойзен числан колминкердайне произведения плюс энзимӓйзен числан и тойзен числан квадратан колминкердайне произведения минус тойзен числан куба.

Примиэракси:

$$29^3 = (30-1)^3 = 30^3 - 3\cdot 30^2\cdot 1 + 3\cdot 30\cdot 1^2 - 1^3 = \\ = 27\,000 - 2700 + 90 - 1 = 24\,389.$$

Если отамма кубах ностеттаван двучленан членат иччех знуакойн ке, то молеммат предыдущойт правилат мӱӧ воймма ӱхтӱттиӓ ӱхтекси:

Двучленан куба он ӱхтен суурус куй энзимӓйзен членан куба плюс энзимӓйзен членан квадратан и тойзен членан колминкердайне произведения плюс энзимӓйзен членан и тойзен членан квадратан колминкердайне произведения плюс тойзен членан куба.

Примиэракси:

$$(2a-3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(-3b) + 3(2a)(-3b)^2 + (-3b^3) = \\ = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

Упражненият.

91. $(a+1)^3$; $(a-1)^3$; $(2x+3)^3$; $(5+3x)^3$.

92. $\left(\frac{1}{2}m-2\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}p+\frac{1}{3}q\right)^3$; $(5-3x)^3$.

IV. Алгебраической юанда.

56. Одночленойн юанда. а) Пидӓккӓх ягуа:

$$a^5 : a^2.$$

Сентӓх куй юаттава пидӓӱ олла ягаян суурус, кудама он умножитту частнойл, а умножиес ӱхтен мойзиэн буквиэн степении озуттаят лизӓтӓх ӱхтех, то эчиттӓвӓс частнойс букван a-н степенин озуттаяна пидäў олла мойне числа, кудама лизäттўнä 2-и ке, андау 5; тäмäн мойне числа он разности 5—2.

Значит:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

Тäмäн луадух лöўвäммä:

$$x^3 : x^2 = x; \; y^4 : y = y^3 \text{ и м. и.}$$

Значит, частной ўхтен и саман числан степениёйн юандас он мойзен тäмäн числан степенин суурус, кудамал степенин озуттая он юаттаван и ягаян озуттаиэн разностин суурус. Тäмä лўхемби выражайях ненга: **ўхтен и саман числан степениёй ягаес юаттаван степенин озуттаяс пуоленнетах ягаян степенин озуттая:**

б) Олгах аннетту ягуа:

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Юаннан определениюа мўöте частной, умножитту ягаял, должен андуа юаттаван. Сентäх эчиттäвäл частнойл коэфициентана пидäў олла 12:4, с. о. 3; букван a-н степенин озуттая ройхес ку пуоленнетах юаттавас олияс тäмäн букван степенин озуттаяс ягаяс олия сен же букван степенин озуттая, буква b вовсе эй туле частнойх, а буква x сийрдўў частнойх оман степенин озуттаян ке.

Тäх луадух: $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax.$

Провиэринда: $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x.$

Правила. **Чтобы ягуа одночлена одночленал, пидäў юаттаван коэфициента ягуа ягаян коэфициентал, юаттаван буквиэн озуттаис пуолендуа ягаян нийен же буквиэн озуттаят и сийрдиä частнойх степенин озуттаиэ мууттаматта нет юаттаван букват, кудамиэ эй оле ягаяс.**

Примиэрат.

1. $3m^3n^4x : 4m\,nx = \frac{3}{4}mn^3.$
2. $-ax^4y^3 : \left(-\frac{5}{6}\,axy^2\right) = +\frac{6}{5}x^3y.$
3. $0{,}8ax^n : (-0{,}02ax) = -40x^{n-1}.$

57. Нолевой степенин озуттая. Если ўхтен и саман числан степениёй ягаес степенин озуттая ройхес ўхтен суурус юаттаван степенин озуттаян ке, то частной должен олла 1; примиэракси $a^3 : a^3 = 1$, сентäх куй $a^3 = a^3 \cdot 1$. Совимма и тäс случайс луадиэ степенин озуттаиэн пуолендамизен; силлой частнойх мўö суамма букван нолевойн степенин озуттаян ке: $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$. Тиэттäвäйне, тäл степенин озуттаял эй оле сидä значениюа, кудаман мўö анноймма степенин озуттаил энне, сентӓх куй эй суа повториэ числуа сомножителяна 0 кердуа. a^0 мӱӧ совимма эллендӓмӓх частнойда буквана a ӱхтен мойзиэн степениёйн юандас, и сентӓх куй тӓмӓ частной он 1, то мӱӧ рубиэмма a^0 лугемах 1-нӓ.

58. Одночленойн ягаматтомуон признакат. Если кахтен целойн одночленан частной эй вой олла точно выразитту целойл одночленал, то санотах, что мойне юанда он невозможной. Одночленойн юанда он невозможной кахтес случайс:

а) **Конза ягаяс он буквиэ, кудамиэ эй оле юаттавас.** Примиэракси: эй суа $4ab^2$ ягуа $2ax$-л, сентӓх куй ёга целой одночлена, умножитту $2ax$-л, андау произведениян, кудамас он буква x, а миӓн юаттавас мойста буквуа вовсе эй оле.

б) **Конза ягаял миттӱӧн-тахто букван озуттая он сууремби юаттаван сен же букван озуттаюа.** Примиэракси, юанда $10a^3b^2$: $:5ab^3$ он невозможной, сентӓх куй миттӱйстӓ целойда одночленуа мӱӧ эммӓ ни кирьюттайс частнойх, се умножиттуо ягаял, андау произведенияс одночленан, кудамас он буква b степенин озуттаян ке, эй пиэнеммӓн 3, силлой куй юаттавас тӓл буквал ройх степенин озуттая 2.

Конза ӱкси одночлена эй ягауву тойзел, то частнойн войби обознуаччиэ вай юаннан знуакойн авул; муга, частнойн, получитун $4a$ юандас $5b$ вой кирьюттуа:

$$4a:5b, \text{ или } \frac{4a}{5b}.$$

Упражнeният.

93. $8a^5x^3y:4a^3x^2$; $3ax^3:(-5ax)$.

94. $a^8b:\left(-\frac{5}{6}a^5b\right)$; $12a^mb^3:4ab$.

59. Многочленан юанда одночленал. Пидӓккӓх многочлена $a+b-c$ ягуа мил-тахто одночленал, кудаман мӱӧ обознуачимма ӱхтел буквал m:

$$(a+b-c):m, \text{ или } \frac{a+b-c}{m}.$$

Многочлена $a+b-c$ он алгебраической сумма, а чтобы ягуа алгебраической сумма миттӱйзел-тахто числал, войби ягуа тӓл числал ёга лизӓттӓвӓн эриже. Сентӓх:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Тӓх нӓх войби убедиэксех и провиэриннан авул: умножихуо многочленан $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ ягаял m, мӱӧ суамма юаттаван $a+b-c$.

Правила. **Чтобы ягуа многочлена одночленал, пидӓӱ тӓл одночленал ягуа многочленан ёга члена и получитут частнойт лизӓтӓ ӱхтех.**

Примиэрат

1. $(20a^3 - 8a^2 - a) : 4a = 5a^2 - 2a - \frac{1}{4}$.

2. $(4x^2 - 2x + 10) : 2x = 2x - 1 + \frac{5}{x}$.

3. $\left(\frac{1}{2}x^3 - 0{,}3x^2 + 1\right) : 2x^2 = \frac{1}{4}x - 0{,}15 + \frac{1}{2x^2}$.

Упражненият.

95. $(4a^2b + 6ab^2 - 12a^3b^5) : \frac{3}{4}ab$.

96. $(36a^2x^5 - 24a^3x^4 + 4a^4x^3) : 4a^2x^3$.

97. $(3a^2y - 6a^2y^2 + 3a^2y^3 - 3a^2y^4) : 3a^2y$.

60. Одночленан юанда многочленал. Пидäккäх одночлена a ягуа многочленал $b + c - d$. Тäмäн мойзен ягамизен частнойда эй суа выразиэ ни ÿннäллизел одночленал, ни ÿннäллизел многочленал, сентäх куй если допустимма, что частной он миттÿйнетахто ÿннäллине одночлена или многочлена, то тäмäн частнойн умножихуо многочленал $b + c - d$, сайзимма тоже многочленан, а эй одночленан (§ 45,47). Частной a-н ягамизес $b + c - d$-л обозначайчех вай юаннан знуакойн авул ненга:

$$a : (b + c - d), \text{ или } \frac{a}{b + c - d}.$$

61. Многочленан юанда многочленал. Многочленан многочленал юандас получитун частнойн вай харвойс случаёйс вой выразиэ ÿннäллизенä многочленана. Примиэракси:

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b,$$

сентäх куй

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Вообще тäмäн луадуйзет частнойт войби обозн**уаччиэ** вай юаннан знуакан авул. Примиэракси, частной $a - b + c$ юандас $d - e$-л выразих ненга:

$$\frac{a - b + c}{d - e}, \text{ или } (a - b + c) : (d - e).$$

62. Азететтулойн многочленойн юанда. Тойчи частнойн войби выразиэ ÿннäллизенä многочленана. Озутамма, куй **тäмä** луадиэ, следующойл примиэрал:

$$(5x^2 - 19x^3 + 17x + 6x^4 - 4) : (1 - 5x + 3x^2).$$

Кирьютамма **молеммат многочленат** букван x **пуолениёй** степениёй мўöте и азетамма юаннан муга, куй се азететах ўнналлизиэ числой ягаес:

$$\begin{array}{lr|l}
 & 6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4 & 3x^2 - 5x + 1 \\
 & -6x^4 + 10x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \overline{2x^2 - 3x - 4} \\
\text{1-не остатка} \ldots & 9x^3 + 3x^2 + 17x - 4 & \\
 & +9x^3 - 15x^2 + 3x \quad & \\
\text{2-не остатка} \ldots\ldots & -12x^2 + 20x - 4 & \\
 & +12x^2 - 20x + 4 & \\
\text{3-с остатка} \ldots\ldots\ldots & 0 \qquad\quad &
\end{array}$$

Предположимма, что эчиттäвä частной он миттўйне-тахто многочлена и сен многочленан членат он азететту тоже пуолениёй букван x степениёй мўöте.

Юаттава должен олла ўхтен суурус куй ягая, умножитту частнойл. Азететтулойн многочленойн умножения тийяммä, что произведениян коргейн члена он ўхтен суурус куй множимойн коргейн члена, умножитту множителян коргеймма членал. Юаттавас коргейн члена он энзимäйне, ягаяс и частнойс тоже оллах энзимäйзет. Значит, юаттаван 1-не члена ($6x^4$) должен олла ягаян 1-н членан ($3x^2$) и частнойн 1-н членан произведенияна. Тäс лиэнöў: чтобы лöўдиä частнойн 1-не члена, пидäў вай юаттаван 1-не члена ягуа ягаян 1-л членал. Ягахуо, суамма частнойн 1-н членан $2x^2$. Кирьютамма сен частнойн чертан ал.

Умножимма ягаян кай членат частнойн 1-л членал и суавун произведениян пуоленнамма юаттавас. Сидä варойн кирьютамма сен юаттаван ал муга, чтобы подобнойт членат олдайс подобнолойн членойн ал, и пуолендаян кайкил членойл муутамма знуакат вастаккайзикси. Пуоленнаннан яльгех суамма 1-н остаткан. Если ку тäмä остатка олис нолян суурус, то се знуаччис, что частнойс ни миттўйзиэ тойзиэ членой эй оле, пайчи лöўветтўö 1-стä, с. о. частной он одночлена. Если же, куй миäн примиэрас, 1-не остатка, эй оле ноля, то иэллех рубиэмма рассуждайччемах ненга:

Юаттава он произведения, получитту ягаян кайккиэн членойн умножиндас частнойн ёга членал. Мўö пуолензимма юаттавас пäй произведениян, получитун ягаян кайккиэн членойн умножиндас частнойн 1-л членал; следовательно, 1-с остаткас он произведения, получитту ягаян кайккиэн членойн умножиндас 1-л, 2-л, 3-л и следующолойл частнойн членойл; коргейн члена остаткас он 1-не; ягаян коргейн члена он тоже 1-не; коргейн члена частнойс (лугематта 1-стä) он 2-не члена. Значит, остаткан энзимäйне члена ($-9x^3$) должен олла ўхтен суурус куй ягаян 1-не члена, умножитту частнойн 2-л членал. Тäс заключайчемма: чтобы лöўдиä частнойн 2-не члена, пидäў вай 1-н остаткан 1-не члена ягуа ягаян 1-л членал. Ягахуо, суамма частнойн 2-н членан — $3x$. Кирьютамма сен частнойх.

Умножимма частнойн 2-л членал ягаян кай членат и суавун произведенинян пуоленнамма 1-с остаткас. Суамма **тойзен остат**кан. Если тäмä остатка он ноля то юанда он лоппиэтту; **если** же, куй миäн примиэрас, 2-не остатка эй оле ноля, то **рубиэм**ма рассуждайччемах ненга:

2-не остатка он произведения, получитту ягаян **кайккиэн** членойн умножиндас 3-л, 4-л и следующолойл частнойн **членойл**. Сентäх куй нäмис частнойн членойс коргейн он **3-с, то** предыдущойн луадух лöÿвäммä частнойн 3-н членан, если **2-н** остаткан 1-н членан юамма ягаян 1-л членал. Ягахуо, суамма—4. Умножихуо — 4-л ягаян кай членат и произведениян **пуолен**дахуо остаткас, суамма 3-н остаткан. Миäн примиэрас **тäмä** остатка родих ноля; тäмä озуттау, что частнойс тойзиэ **членой**, пайчи лöÿветтÿлöй эй вой олла. Если 3-с остатка **эй олис** 0, то тäмäн остаткан энзимäйне члена пидäйс ягуа **ягаян 1-л** членал; тäс родизих частнойн 4-с члена и м. и.

Войс юаттаван и ягаян азеттуа ÿхтен и саман букван **сууре**ниейн степениейн мугах и сен яльгех луадиэ муга, куй **васта** оли санотту; силлой пидäйс основывайдуо сих, что произведениян алин члена он множимойн алиман членан произведения множителян алимал членал.

Примиэрат:

$$
\text{а)}\quad
\begin{array}{l|l}
28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a \\
\text{„}\ \underline{\quad - 8ax^3 + 20a^2x^2 \qquad\qquad} & \overline{4x^2 - 3ax} \\
\quad - 21ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x & \\
\quad \text{„}\ \underline{\quad + 6a^2x^2 - 15a^3x} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Мÿö тäс эммä кирьюттанут ягаян 1-зен членан произведениёй 1-л, 2-л и м. и. частнойн членойл, сентäх куй нäмä произведеният айнос оллах нийен членойн суурруот, кудамиэн ал нет кирьютетах и пуолендаес айнос тойне тойзен ке хäвитäх. Обыкновенно муга и луаитах.

$$
\text{б)}\quad
\begin{array}{l|l}
x^3 - a^3 & x - a \\
\underline{\text{„}\ + ax^2} & \overline{x^2 + ax + a^2} \\
ax^2 - a^3 & \\
\underline{\text{„}\ + a^2x} & \\
a^2x - a^3 & \\
\underline{\text{„}\ + a^3} & \\
\quad 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\text{в)}\quad
\begin{array}{l|l}
x^4 - a^4 & x - a \\
\underline{\text{„}\ + ax^3} & \overline{x^3 + ax^2 + a^2x + a^3} \\
ax^3 - a^4 & \\
\underline{\text{„}\ + a^2x} & \\
a^2x^2 - a^4 & \\
\underline{\text{„}\ + a^3x} & \\
a^3x - a^4 & \\
\underline{\text{„}\ + a^4} & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

Муга же войби убедиэксех, что разностит $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$... и вообще $x^m - a^m$ ягаувутах остаткатта разностил $x - a$, с. о. **кахтен числан ÿхтен мойзиэи степениейн разности ягаудуу нийен числойн разностил остаткатта.**

63. Многочленойн ягаматтомуон признакат. Многочленан ягамиста многочленал эй суа луаднэ тāмāн мойзис случайлойс;

а) Если главнойн букван озуттая юаттаван коргеиммас членас он пиэнембн сен же букван озуттаюа ягаян коргеиммас членас, сентāх что силлой эй суа суаха частнойн коргеимбуа членуа.

б) **Если главнойн букван озуттая юаттаван алимас членас он сууремби сен же букван озуттаюа ягаян алимас членас,** сентāх что силлой эй суа суаха частнойн мадалимбуа членуа.

в) Если юаттаван главнойн букван озуттаят коргеиммас и алимас членойс соответственно эй олла пиэнеммāт ягаян коргеимман и алиман членойн озуттаиэ, то эй суа виэ сануо, что ягамине он возможной. Тāс случайс, чтобы суудиэ юаннан возможностих или невозможностих нāх, пидāў рувета луадимах иче действиюа и яткуа сидā сих суате, куни эммā лопуллизести убедиуву, он-го возможной вай невозможной суаха частной многочленан видас.

Упражнениятт.

98. $(x^2-3x-4):(x+1)$; $(y^2-y-2):(y-2)$.
99. $(6x^3+2-3x^2-4x):(2x-1)$
100. $(3ax^5-15a^2x^4+6a^3x^3):(x^2-5ax+2a^2)$.
101. $(x^6-a^6):(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)$.

V. Множителёйх разложимине.

64. Алгу замечания. Алгебраическойх юандах нāх паистес мўō озутимма, что эрāхис случайлойс частнойн войби обозначайя вай юаннан знуакал. Муга суадулой выражениёй, куй примиэракси: $\frac{a}{b}$, $\frac{2x}{3a}$, $\frac{x^2-4x+y^2}{x+y}$ и м. и., он приймиттў сануо *алгебраическолойкси дробилойкси.*

Тервāх мўō нāеммā, что алгебраическолой дробилой, арифметическолойн луадух, войби тойчи упростиэ *сократиннан* авул, с. о. юаттаван и ягаян юаннан авул нийен ўхтехизил множителёйл, если нийдā он олемас. Сикси, чтобы мойне сократинда войс луадиэ труудатта, пидāў опастуо разлагаймах алгебраическолой выражениёй множителёйх (сих луадух, куй арифметикас дробилойн сократиндах нāхте пидāў малтуа разлагайя ўннāллизиэ числой составляющолойх множителёйх).

65. Уннāллизиэн одночленойн разложимине. Отамма миттўйзен-тахто ўннāллизен одночленан, примиэракси $6a^2b^3$. Сентāх куй се он произведения, то ўхтā сен нāгўō мўōте войби разложиэ сен составляющолойх множителёйх. Муга:

$$6a^2b^3=2\cdot3(aa)\ (bbb)=2\cdot3aa\,bbb.$$

Ўхтўттāен нāмā сомножителят миттўмих-тахто группих (пользуйччиудуен умножениян сочетательнойл свойствал), мўō воймма тăдă одночленуа варойн озуттуа различнолой разложенией, примиэракси:

$$6a^2b^3=(6a)\ (ab^3)=(2a^2b)(3b^2)=(3ab^2)(2ab) \text{ и м. и.}$$

66. Многочленойн разложимине. Озутамма простоймат случайт, конза многочлена войби олла разложитту множителёйх.

а) Сентăх куй $(a+b-c)\ m=am+bm-cm$,

то и яриллех:
$$am+bm-cm=(a+b-c)\ m.$$

Тăх луадух, **если многочленан кайкис членойс он ўхтехине множителя, сен войби оттуа скобкиэн эдех.**

Примиэракси.

1. $x^6-2x^2+3x=x(x^5-2x+3)$.
2. $16a^2-4a^3=4a^2\ (4-a)$.
3. $5m(x-1)+3n(x-1)=(x-1)\ (5m+3n)$.

б) Сентăх куй
$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2,$$
то и яриллех:
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Тăх луадух, **если двучлена он ўхтен числан квадратта минус тойзен числан квадратта, то сен войби замениэ произведениял, получитул нăйен числойн сумман умножиндас кийен же числойн разностил.**

Примиэракси:

1. $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)\ (x-2)$.
2. $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)\ (y-1)$.
3. $9a^2-\frac{1}{4}=(3a)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(3a+\frac{1}{2}\right)\left(3a-\frac{1}{2}\right)$.
4. $25x^2-0{,}01=(5x)^2-0{,}1^2=(5x+0{,}1)\ (5x-0{,}1)$.
5. $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)\ (m^2-n^2)=$
$=(m^2+n^2)\ (m+n)\ (m-n)$.
6. $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)]\ [x-(x-1)]=$
$=(x+x-1)\ (x-x+1)=2x-1$.

в) Сентăх куй.
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ и } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
то и яриллех:
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)$$
и
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)\ (a-b).$$

Значит, если трехчлена он кахтен миттӳӧн-тахто числан квадратойн сумма, сууреннетту или пиэненнеттӳ нӓйен числойн каксинкердайзел произведенияl, то сен войби замениэ нӓйен числойн сумман или разностин квадратал.

Примиэрат.

1. a^2+2a+1.

Сентӓх куй $1=1^2$; $2a=2\cdot a\cdot 1$, то $a^2+2a+1=(a+1)^2$.

2. x^4+4-4x^2

Тӓс $x^4=(x^2)^2$, $4=2^2$ и $4x^2=2x^2\cdot 2$; сентӓх:

$$x^4+4-4x^2=(x^2-2)^2.$$

Вой муга же кирьюттуа, что $x^4+4-4x^2=(2-x^2)^2$, сентӓх куй двучленат x^2-2 и $2-x^2$, квадраттах ностеттуо, аннетах трехчленат, кудамат отличайяхес вай членойн порядкал:

$$(x^2-2)^2=x^4-4x^2+4;\ (2-x^2)^2=4-4x^2+x^4.$$

3. $-x+25x^2+0{,}01$.

Тӓс он какси квадраттуа: $25x^2=(5x)^2$ и $0{,}01=0{,}1^2$. Числойн $5x$ и $0{,}1$ каксинкердайне произведения составляйччоу $2\cdot 5x\cdot 0{,}1=$ $=x$. Сентӓх куй аннетус трехчленас молеммат квадратат оллах $+$ знуакан ке, а каксинкердайне произведения (с. о. x) он знуакан ке $-$, то.

$$-x+25x^2+0{,}01=25x^2-x+0{,}01=(5x-0{,}1)^2=(0{,}1-5x)^2.$$

4. $-x^2-y^2+2xy$.

Отамма $-$ знуакан скобкиэн эдех: $-(x^2+y^2-2xy)$. Скобкис олия трехчлена, очевидно, он $(x-y)^2$. Значит:

$$-x^2-y^2+2xy=-(x^2+y^2-2xy)=-(x-y)^2=-(y-x)^2.$$

г) Тойчи многочленан войби разложиэ множителёйх сен членойн ӳхтӳттӓмизен авул эрӓхих группих.

Примиэракси:

1. $ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=$
$=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.

2. $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=$
$=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=(3-x)(2+x)(2-x)$.

3. $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=(m-n)^2-p^2=$
$=(m-n+p)(m-n-p)$.

4. $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=$
$=[x+(y-3)][x-(y-3)]=(x+y-3)(x-y+3)$.

д) Тойчи он полезно оттуа абу членой или миттӳйне-тахто члена разложиэ кахтекси членакси.

Примиэракси:

1. $a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) =$
$= a^2(a - b) + b(a + b)(a - b) = (a - b)[a^2 + b(a + b)] =$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

2. $a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = a^2(a + b) - b(a^2 - b^2) =$
$= (a + b)[a^2 - b(a - b)] = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$

3. $2x^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + xy + y^2 = 2x(x + y) + y(x +$
$+ y) = (x + y)(2x + y).$

Упражнениям.

102. $2a + 2x$; $ax + ay$; $4y^2 - 6xy$.
103. $4ax - 2ay$; $6x^2y + 9xy^2$.
104. $12a^2b - 9a^2b^2 + 6ab^3$; $xy^2 - 7xy + 4x^2y$
105. $m^2 - n^2$; $a^2 - 1$; $1 - a^2$.
106. $x^2 - 4$; $m^2 - 9$; $4x^2 - y^2$.
107. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}y^6$; $0{,}01a^6 - 9$; $3a^5 - 48ab^8$.
108. $(x - y)^2 - a^2$; $9(a + 2b)^2 - 1$; $a^2 - (b + c)^2$.
109. $(x + y)^2 - (x - y)^2$; $16x^2 - 4(x + y)^2$.
110. $x^2 - 2xy + y^2$; $m^2 + n^2 + 2mn$.
111. $2ab + a^2 + b^2$; $a^2 - 4ab + 4b^2$.
112. $x^2 + 8x + 16$; $x^2 + 1 + 2x$.
113. $5a^3 - 20a^2b + 20ab^2$.
114. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.
115. $ax + bx + ay + by$; $ac - ad + bd - bc$.
116. $a^2 + ab - a - b$; $xz - 3y - 3z + xy$.
117. $4mn + xy - 2nx - 2my$; $8a^3 - 12a^2 - 18a + 27$ (3-х множителях.)

VI. Алгебраическойт дробит.

67. Алгебраическойн дробин эро арифметическойс. Кахтен алгебраическойн выражениян юандас получиттуо частнойда санотах *алгебраическойкси дробикси*. Мойзет оллах, примиэракси, выражениям:

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a + b}{c - d}, \quad \frac{2x^2 - x + 5}{x + 2}.$$

Качомма эрӓхӓт алгебраическолойн дробилойн особенностит.

Отамма дробин $\frac{a}{b}$; лӧӯвӓммӓ сен численнойн величинан, если $a = 12$ и $b = 4$, сен яльгех лӧӯвӓммӓ численнойн величинан, если $a = 3$ и $b = 7$; иэллех, если $a = 20$ и $b = 30$ и, яльгимӓй, лӧӯвӓммӓ численнойн величинан, если $a = 0$ и $b = 3$. Суамма соответственно числат 3, $\frac{3}{7}$, $-\frac{2}{3}$ и 0.

Тӓх луадух:

алгебраическойн дробин численной величина войбн олла ӯннӓлнне н дробной чнсла, положнтельной н отрицательной, а муга же н ноля.

Сентӓх куй a и b задуачан условиейс зависсиен, войях суаха кайкен мойзиэ числоволой значенией, то:

алгебраическойн дробии числителя и знаменателя, молеммат эриже, войях олла ӯннäллизенä числаиа и дробнойна, положительнойиа и отрицательнойна. Дробин числителя войби муга же мууттуо нолякси, если же нолякси мууттуу знаменателя, то дроби каймуау смыслан (сентäх куй нолял ягуа эй суа).

Тäдä мӯöте, алгебраическойн дробин понятия он левиэмби, куй арифметическойн. Яльгимäйстä войби качелла алгебраическойн дробин частнойна случайна.

68. Дробин основной свойства. Керран дроби он частной, получитту числителян юандас знаменателял, а частной эй мууту юаттаван и ягаян умножиндас (или ягамизес) ӯхтел и самал числал (пайчи нолюа, § 34, г), то тäмä свойства он и дробил, с. о. **дробин величина эй мууту, если сен числителян и знаменателян умножимма (или юамма) ӯхтел и самал числал** (пайчи нолюа).

Примиэракси, если дробин $\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ числителян и знаменателян умножимма $-\frac{4}{9}$, то суамма:

эндине дроби $-\frac{2}{3}:\frac{7}{5}=-\frac{10}{21}$;

уузи дроби

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]:\left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]=\left(+\frac{8}{27}\right):\left(-\frac{28}{45}\right)=$$
$$=-\frac{8\cdot 45}{27\cdot 28}=-\frac{360}{756}=-\frac{10}{21};$$

мӯö нäеммä, что дробин величина яй эндине.

Пользуйччиудуен тäл дробин свойствал, мӯö воймма алгебраическолойн дробилойн ке луадиэ мойзиэ же преобразованиейн, миттӯйзиэ озутетах арифметикас арифметическолойх дробилойх нäхте, с. о. мӯö воймма сократтиэ дробилой, если он возможно, и приведиэ нет, если пидäӯ, общойх знаменателях.

69. Дробин членойн приведимине ӯннäллизех видах. Если ройтех муга, что дробин членойс ичессäх он дробилой, то нийен умножихуо соответственно валлитул числал или алгебраическойл выражениял, мӯö воймма пиäстä нäйс дробилойс. Примиэракси:

1) $\dfrac{\frac{3}{4}a}{\frac{4}{b}}$; молембиэн членойн умножихуо 4-л, суамма $\dfrac{3a}{4b}$;

2) $\dfrac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n}$; „ „ „ 24, „ $\dfrac{16\ m}{21\ n}$;

3) $\dfrac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$ „ „ „ x, „ $\dfrac{ax^2-x}{x-1}$.

Упражненият.

Приведиэ дробин членат ӱннӓллизех видах:

118. $\dfrac{\frac{5}{7}x}{y}$; $\dfrac{0{,}3ab}{m}$; $\dfrac{a^2}{1\frac{3}{8}b}$; $\dfrac{m}{2{,}36n}$. 119. $\dfrac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}ac}$; $\dfrac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}$; $\dfrac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$.

120. $\dfrac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}$; $\dfrac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$. 121. $\dfrac{ax+b+\frac{c}{}}{ax+1}$; $\dfrac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$

70. Дробин членойн знуакойн мууттамине. Мууттуа знуакка дробин числителян и знаменателян иэс он ӱксикай, куй умножиэ нет — 1-л, мин периӓ дробин величина эй мууту. Муга:

$$\frac{-8}{-4}=2 \text{ и } \frac{+8}{+4}=2;\quad \frac{-10}{+2}=-5 \text{ и } \frac{+10}{-2}=-5.$$

Замиэтимма, что если муутамма знуакан ӱхтен миттӱйзен тахто членан иэс и сил айгуа муутамма знуакан дробин иэс, то дробин величина тоже эй мууту; примиэракси:

$$\frac{-10}{+2}=-5;\ -\frac{-10}{-2}=-5;\ -\frac{+10}{+2}=-5.$$

Нӓйл дробин свойствил войби тойчи пользуйяксех вӓхӓйзел сидӓ преобразуйес, примиэракси:

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=-\frac{m^2-n^2}{-(n-m)}=-\frac{(m+n)(m-n)}{m-n}=-(m+n).$$

Упражненият.

Мууттуа дробилойн числителёйн и знаменателёйн знуакат:

122. $\dfrac{1-x}{-x}$; $\dfrac{-3a^2}{a-b}$; $\dfrac{1-a}{2-b}$.

123. $\dfrac{-a^2-b^2+2ab}{ba}$; $\dfrac{1-m^2}{-m+1}$.

124. Мууттаматта дробилойн величинуа, панна ёга дробин эдех знуакка —.

$$\frac{-3a}{6};\ \frac{5x}{-3};\ \frac{1-a}{b};\ \frac{a}{2-x};\ \frac{m^2-n^2}{n-m}.$$

71. Дробилойн сократинда. Алгебраическойн дробин войби мууттуа простоймбах видах сийт случайс, конза числителя и знаменателя содержитах ӱхтехизиэ множителёй.

Примиэрат.

$$\frac{48ab}{60ac}=\frac{4b}{5c};\quad \frac{3a^2b}{7a^3b}=\frac{3}{7a};\quad \frac{160a^5b^2d^2}{120a^3b^5}=\frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Туодулойс примиэройс пāй нāгӯӯ, что:

дробилой сократтиес числителян и знаменателян коэфициентат сократитахес ӯхтехизел сууриммал ягаял, а ӯхтехизет буквенной т множителят сократитахес ӯхтехизел степенил, кудамас нет оллах числителяс и знаменателяс.

Если дробис числителя или знаменателя (или се и тāмä) оллах многочленат, то пидāӯ энзимāй нет многочленат разложиэ множителёйх (муга, куй оли озутетту § 66); если нийен кескес он ӯхтен мойзиэ, то нийл множителёйл дроби войби сократтиэ.

Примиэрат.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$$

(2-л юаннан сиях он панду умножинда $\frac{1}{2}$-л.)

Упражненият.

Сократтиэ дробит:

125. $\frac{7}{7x}$; $\frac{2m}{3m^2}$; $\frac{4a^2b}{6ab^2}$; $\frac{42x^3y^3}{112x^2y^2}$.

126. $\frac{12ab}{8ax}$; $\frac{3a^2bc}{12ab^2}$; $\frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}$.

127. $\frac{ab}{a^2+ab}$; $\frac{9xy}{3x^2-3xy}$; $\frac{4a+8}{4a-8}$.

128. $\frac{a^2+a}{a^2-a}$; $\frac{x-3}{x^2-9}$; $\frac{a^2+a}{a^2-1}$.

129. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$; $\frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$; $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$.

130. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$.

72. Дробилойн привединда ӯхтехизех знаменателях а) Отамма дробит, кудамил знаменателят оллах буквенной т одночленат; примиэракси:

$$\frac{a}{2b};\quad \frac{c}{3ab};\quad \frac{d}{5ab^2}.$$

Ӯхтехизекси знаменателякси пидāӯ, очевидно, оттуа $30ab^2$. Дополнительной т множителят силлой ройтахес: $15ab$, $10b$ и 6.

$$\frac{\overset{15ab}{\overbrace{a}}}{2b}=\frac{15a^2b}{30ab^2};\quad \frac{\overset{10b}{\overbrace{c}}}{3ab}=\frac{10bc}{30ab^2};\quad \frac{\overset{6}{\overbrace{d}}}{5ab^2}=\frac{6d}{30ab^2}.$$

Отамма виэ примиэран:

$$\frac{a}{12b^2c};\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2};\quad \frac{5c}{18ab}.$$

Ўхтехине знаменателя должен ягаудуо кайкил аннеттулойл знаменателёйл. Следовательно, ўхтехизен знаменателян пиэнимбāнā коэфициентана он аннеттулойн знаменателёйн коэфициентойн пиэнин ўхтехине кратной. Буквеннойт сомножителят должны олла ўхтехизес знаменателяс сен мойзес степенис, кудама ягаудуйс ёга степенил, кудаман тāмā множителя имейччӧў знаменателяс. Значит, аннетус примиэрас ўхтехизен знаменателян коэфициентакси пидāў оттуа числойн 12, 8 и 18 пиэнин ўхтехине кратной, с. он 72, множителя a пидāў оттуа степенин озуттаян ке 3; множителя b степенин озуттаян ке 2 и м. и. Ўхтехине знаменателя ройх $72a^3bc^4d^2$.

Дополнительнойт множителят лиэтāх: $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ и $4a^2bc^4d^2$.

$$\frac{a\overbrace{\;}^{6a^3c^3d^2}}{12b^2c}=\frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \frac{3b\overbrace{\;}^{9b^2}}{8a^3c^4d^2}=\frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2};\quad \frac{5c\overbrace{\;}^{4a^2bc^4d^2}}{18ab}=\frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Нāйс примиэройс нāгўў:

Чтобы лӧўдиā ўхтехине знаменателя монес алгебраическойс дробис одночленнолойн знаменателёйн ке, пидāў вай оттуа аннеттулойн дробилойн знаменателёйн коэфициентойн пиэнин ўхтехине кратной, сен яльгех оттуа буквеннойт множителят коргеиммас степенис, кудамас нет оллах аннеттулойс знаменателёйс; кайккиэн нāйен множителёйн произведения и ройх аннеттулойн дробилойн ўхтехизекси знаменателякси.

б) Иэллех отамма дробит, кудамис знаменателят оллах многочленат, примиэракси:

$$\frac{x}{a-b};\quad \frac{y}{a+b};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Разложимма ёга знаменателян множителёйх. Энзимāйзет какси эй разлагайяхес, а колмас он $(a+b)(a-b)$. Значит, ўхтехизекси знаменателякси ройх a^2-b^2; суамма:

$$\frac{x\overbrace{\;}^{a+b}}{a-b}=\frac{ax+bx}{a^2-b^2};\quad \frac{y\overbrace{\;}^{a-b}}{a+b}=\frac{ay-by}{a^2-b^2};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

в) Войби случчиэксех, что ни миттўйзел знаменателёйн пуарал эй оле ўхтехизиэ множителёй. Силлой пидāў луадиэ муга, куй луаитах арифметикас, именно: умножиэ ёга аннетун дробин числителя и знаменателя досталилойн дробилойн знаменателёйн произведениял.

Примиэракси:

1. $\frac{a}{3m};\ \frac{2b}{5n};\ \frac{3c}{2p};\ \ldots\ \frac{a\cdot 5n\cdot 2p}{3m\cdot 5n\cdot 2p};\ \frac{2b\cdot 3m\cdot 2p}{5n\cdot 3m\cdot 2p};\ \frac{3c\cdot 3m\cdot 5n}{2p\cdot 3m\cdot 5n}$, т. с. $\frac{10\,anp}{30\,mnp};\ \frac{12\,bmp}{30\,mnp};\ \frac{45\,cmn}{30\,mnp}.$

2. $\frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a-b}$; $\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}$; $\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}$, т. с.
$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$; $\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}$.

Упражненият.

Приведиэ ӱхтехизех знаменателях дробит:

131. $\frac{3}{a}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{x}{3y}$; $\frac{y}{4x}$; $\frac{x}{4}$; $\frac{4}{x}$.

132. $\frac{2}{a}$; $\frac{3}{b}$; $\frac{1}{2c}$; $\frac{7x}{4a^2}$; $\frac{2}{3b^2}$; $\frac{4b^2}{5x}$.

133. $\frac{5xy}{3a^2bc}$; $\frac{3ab}{4mx^2y}$; $\frac{x}{4ab}$; $\frac{y}{8a^3b^2}$.

134. $\frac{3}{8ab}$; $3x$; $\frac{a}{5x^3}$ (предстуавиэ $3x$ дробина $\frac{3x}{1}$).

135. $\frac{x+y}{2x-2y}$; $\frac{x-y}{3x+3y}$; $\frac{1}{m+1}$; $\frac{2}{m^2-1}$; $\frac{3}{m-1}$.

136. $\frac{2}{x^2-2x+1}$; $\frac{3a}{x-1}$; $\frac{1}{x-1}$; $\frac{2}{2x-1}$; $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$.

137. $\frac{x}{28a^3b^2}$; $\frac{y}{21a^2b}$; $\frac{a-b}{b}$; $\frac{2a}{a-b}$; $\frac{1}{a^2-b^2}$.

73. Дробилойн лизиӑндӑ и пуоленнанда. Многочленан одночленал юанда правилуа мӱӧте (§ 59) мӱӧ воймма кирьюттуа:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m};\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Лугиен нӑмӑ равенстват ойгиэл пуолел пӑй хурах пуолех, лӧӱвӑммӑ:

1. Чтобы лизӑтӑ ӱхтех дробит ӱхтен мойзиэн знаменателёйн ке, пидӑӱ лизӑтӑ нийен числителят и сумман ал кирьюттуа се же знаменателя.

2. Чтобы пуолендуа дробит ӱхтен мойзиэн знаменателёйн ке, пидӑӱ пуолендуа нийен числителят и разностин ал кирьюттуа се же знаменателя.

Если лизиӑндӑх или пуоленнандах нӑхте аннеттулойл дробилойл оллах разнойт знаменателят, то энзимӑй нет пидӑӱ приведиэ ӱхтех знаменателях.

Примиэракси:

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$. (дополнительные множители: df, bf, bd)

2. $\frac{3m^2}{10a^2bc}-\frac{5n^2}{4ab^2}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}$. (дополнительные множители: $2b$, $5ac$)

3. $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$.

$2x-2=2(x-1)$	доп. множ. $=x+1$
$2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1)$	,, ,, $=1$

Ӱхтехине знам. $2(x+1)(x-1)$

Пуоленнандас суамма:

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Упражнеиият.

138. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}$; $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3x}$; $\frac{a-1}{2}-\frac{2x+3}{4}$.

139. $1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$ $\left(\text{изобразиэ 1 дробина } \frac{1}{1}\right)$.

140. $1+\frac{x-1}{2}$; $x-\frac{2(3-x)}{3}$; $1-\frac{2(x-1)}{3}$.

141. $\frac{2-x}{1+2x}-\frac{2-x}{1-2x}-\frac{1+6x}{4x^2-1}$; **142.** $\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a+b}{a^2-ab}$.

143. Микси мууттуу дроби $\frac{m-x}{n-1}$, если x сиях панна $\frac{mn}{m+n}$?

74. Дробилойн умножинда. Чтобы умножиэ дроби дробил, пидäÿ умножиэ числителя числителял и знаменателя знаменателял и энзимäйне произведения оттуа числителякси, а тойне знаменателякси, с. о.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Тäмä правила совпадайччоу арифметическолойн дробилойн умножинда правилан ке. Но сентäх куй буквил войях подразумевайччиэксех эй вай ÿннäллизет положительнойт числат, но и дробнойт и отрицательнойт, то пидäÿ провиэриэ тäмä правила и алгебраическолой дробилой варойн, конза числат a, b, c и d ройтахес миттÿöт-тахто. Предположимма энзимäй, что нäмä числат оллах положительнойт и дробнойт. Олгах, примиэракси:

$$a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{7}{8},\quad c=\frac{5}{6} \text{ и } d=\frac{9}{4}.$$

Панемма нäмä числат равенствах (1), чётайен эриже сен хуран и сен ойгиэн пуолен и сравнимма результатат; суамма:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}:\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7};\quad \frac{c}{d}=\frac{5}{6}:\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9};$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 4}{6\cdot 9}=\frac{2\cdot 8\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 6\cdot 9}.$$

(окончательнойда чётайчуста эммä рубиэ луадимах).

Нÿгöй лöÿвäммä равенстван (1) ойгиэн пуолен:

$$ac=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6};\quad bd=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7\cdot 9}{8\cdot 4};$$
$$\frac{ac}{bd}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}:\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 7\cdot 9}.$$

Суадулойн результатойн сравнихуо, мÿö нäемма, что нет оллах ӳхтен мойзет, сентăх куй (ӳннăллизиэн числойн умножениян переместительнойн законан мугах) $2\cdot 8\cdot 5\cdot 4=2\cdot 5\cdot 8\cdot 4$ и $3\cdot 7\cdot 6\cdot 9=3\cdot 6\cdot 7\cdot 9$. Следовательно, равенства (1) йиăӳ вернойкси и тăс случайс.

Нӳгӧй допустимма, что миттуйне-тахто числойс a, b, c и d родих отрицательнойкси. Олгах, примиэракси $a=-\frac{2}{3}$ (b, c и d оллах эндизет значениятр). Силлой дроби $\frac{a}{b}$ ройхес отрицательной и равенстван (1) кай хура пуоли ройх тоже отрицательной числа. Ойгиэс пуолес произведения ac ройх отрицательной, и сентăх кай ойгиэ пуоли тоже ройх отрицательной числа. Хуран и ойгиэн пуолен абсолютной же величина йиăӳ эндине. Значит, равенства (1) эй риккоуду. Муга же убедиммоксех, что равенства (1) йиăӳ вернойкси и силлой, конза и тойзет числат ройтахес отрицательнойт.

Кай се, мин мӳӧ санойммa частнойх примиэрах нăх, войби олла повторитту и ёгахизех тойзех примиэрах нăх; значит, равенства (1) он верной буквиэн a, b, c и d ёга значенийл.

75. Дробин квадратта и куба. Применимма дробилойн умножиннан правилуа нийен ностамизех квадраттах и кубах. Правилан мугах:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2};\ \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Тăс следуйччоу:

Чтобы ностуа алгебраической дроби квадраттах или кубах, пидăӳ ностуа тăх степених эриже числителя и знаменателя.

76. Дробилойн юанда. Чтобы ягуа дроби дробил, пидăӳ энзимăйзен дробин числителя умножиэ тойзен дробин знаменателял, энзимăйзен дробин знаменателя тойзен числителял и энзимăйне произведения оттуа числителякси, а тойне знаменателякси, с. о.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Что тăмă равенства он верной кайккиэ числой a, b, c и d варойн, войби убедиэксех юаннан простойл проверкал: частнойн умножихуо ягаял, мӳӧ суамма юаттаван:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ad\overset{cd}{\overbrace{c}}}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

77. Замечаният. 1) Сентăх куй $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, то юаннан правилан войби сануо тойзин:

Чтобы ягуа дроби дробил, пидăӳ вай энзимăйне дроби умножиэ тойзел киăннетӳл дробил.

2) Ёга ӳннăллизех алгебраическойх выражениях войби качуо куй дробих, кудамал числителя он ӳннăллине выражения,

а знаменателяна он 1; примиэракси: $a = \frac{a}{1}$; $3x^2 = \frac{3x^2}{1}$ и м. и. Сентӓх миӓн аннеттулой **действиейн правилой дробилойн ке войби примениэ и мойзих случайлойх, конза миттӱйне-тахто аннеттулойс выражениейс он ӱннӓллине,** максау вай тӓмӓ ӱннӓллине выражения изобразиэ дробина. Примиэракси:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Упражнениям.

144. $-\frac{3x}{5a} \cdot \frac{10ab}{7x^3}$; $\frac{1-a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1-a^2}$. **145.** $\frac{4x^2v^2}{15n^4a^3} \cdot 45p^2d^2$; $\frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{6a}{x+1}$.

146. $\left(a + \frac{ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{ab}{a+b}\right)$; $\frac{3a^2b^5c^4}{4x^2v^2z^4} : \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^2}$.

147. $\frac{12a^4b^2}{5mp} : 4ab^2$; $81a^3b^2 \frac{27ab^2}{5x^2y}$.

148. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{5a^2+5b^2}{a+b}$; $\left(x + \frac{xy}{x-y}\right) : \left(x - \frac{xy}{x+y}\right)$.

НЕЛЛĂС ОТДИЭЛА.

ЭНЗИМӒЙЗЕН СТЕПЕНИН УРАВНЕНИЯТ.

1. Уравнениёйн общойт свойстват.

78. **Равенстват и нийен свойстват.** Какси числуа или какси алгебраическойда выражениюа, ӯхтӯтеттӯŏ знуакал =, состуавитах *равенства*. Нӓйдӓ числой или выражениёй санотах равенстван *пуоликси*; се ми он хурал пуолел = знуаккуа, составляйччоу *хуран* пуолен, а се ми он ойгиэл пуолел тӓс знуакас, составляйччоу *ойгиэн* пуолен.

Примиэракси, равенствас:

$$a+a+a+=a\cdot 3.$$

хура пуоли он сумма $a+a+a$, а ойгиэ — произведения $a\cdot 3$.

Обознуаччихуо равенстван молеммат пуолет ӯхтел буквал, мӯŏ воймма равенстван главноймммат свойстват выразиэ ненга:

а) Если $a=b$ и $b=$a, с. о. **равенстван пуолет войби ваехтуа кескенӓх;**

б) Если $a=b$, $b=c$, то $a=$c, *с.* о., если какси числуа эриже оллах колманнен числан сууруот, то нет оллах и кескенӓх ӯхтен сууруот. в) **Если ӯхтен сууруйзих числойх лизиӓммӓ или никйс пуоленнамма ӯхтен сууруот числат, то равенства эй риккоуду,** с.о. если $a=b$ и $m=n$, то $a+m=b+n$ и $a-m=$ $=b-n$.

г) Если $a=b$ и $m=n$, то $am=bn$ и $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, с. о. **если ӯхтен сууруот числат умножимма или юамма ӯхтен сууруйзил числойл, то равенства эй риккоуду.**

Он полезно обраттиэ внимания сих, что **равенстван молембиэн пуолиэн умножимине — 1 он равносильной знуакойн мууттамизел равенстван пуолиэн иэс.** Муга, если равенстван $-x=-5$ молеммат пуолет умножиэ — 1-л, то суамма: $x=5$.

79. **Тождества.** Кахта алгебраическойда выражениюа санотах *тождественнолойкси,* если кайкил нийс олиёйн буквиэн численнолойл значениёйл нийл он ӯкси и сама численной величина. Мойзет, примиэракси, оллах выраженият:

$$ab \text{ и } ba;\ a+(b+c) \text{ и } a+b+c.$$

Если миттӯйзес-тахто равенствас молеммат сен пуолет оллах тождественнойт алгебраическойт выраженият, то тӓмӓн мойста равенствуа санотах *тождествакси*. Мойне он, примиэракси, равенства:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Тождествакси санотах и мойста равенствуа, кудамас оллах вай цифройл выразитут числат, если молеммат сен пуолет озутеттулойн действиейн луаиттуо, аннетах ӯкси и сама числа, примиэракси:

$$(40\cdot 5):8=5^2.$$

80. Уравнения. Пидӓккӓх мейл решшиэ тӓмӓн мойне задуачча: туатол он 40 вуотта, пойял 17 вуотта. Айян-го вуувен пройдихуо туатто ройх кахта кердуа ванхемби пойгуа?

Обыкновеннойл (арифметическойл) способал он югиэ решшиэ тӓмӓ задуачча. Решиммӓ сен, применяйен буквеннолой обозначенией. Обознуачимма эчиттӓвӓн вуозиэн лувун буквал x. x вуувен пройдихуо туатол ройх $40+x$ вуотта, а пойял ройх $17+x$ вуотта. Задуачан условией мӯӧте туатол вуозиэн лугу, с. о. $(40+x)$ пидӓӯ олла кахта кердуа сууремби пойян вуозиэн лугуо, с. о. $(17+x)$. Тӓмӓн мӯӧ воймма кирьюттуа равенствал:

$$40+x=2(17+x).$$

Провиэриндал убедиммоксех, что тӓмӓ равенства он верной вай силлой, конза $x=6$. Тотта, тӓл x-н значениял ройх:

$$40+6=2(17+6);\ 46=46.$$

Кайкил тойзил числойл, кудамат мӯӧ панемма x-н сиях, равенства риккоудуу.

Тӓдӓ равенствуа эй суа сануо тождествакси, сентӓх куй се он верной эй кайкил сийт олиейн буквиэн значениейл. Вай 6-н панемине x-н сиях мууттау тӓмӓн равенстван тождествакси:

$$46=46.$$

Если равенстван, кудамас он ӯкси либо энӓмби буквиэ, молеммил пуолил оллах ӯхтен мойзет численнойт величинат эй кайкен мойзил нӓйен буквиэн значениейл, то сидӓ санотах *уравнениякси*, а нӓйл буквил обозначиттулой числой санотах уравнениян *тиэдӓмӓттӧмикси* (числойкси). Нӓйдӓ числой обыкновенно обозначайях латинскойн алфавитан яльгимӓйзил буквил (x, y, z ...).

Уравнениэй он ӯхтен, кахтен и м. и. тиэдӓмӓттӧмӓн ке.

Р е ш ш и э у р а в н е н и я — знуаччиу лӧӯдиӓ сийт олиейн тиэдӓмӓттӧмиэн нет значеният, кудамат у д о в л е т в о р я й я х уравнениял, с. о. муутетах се тождествакси. Нӓйдӓ тиэдӓмӓттӧмиэн значениэй санотах уравнениян *юурикси*.

Уравнениял ӯхтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке войби олла ӯкси юури, какси юурда и энӓмби; примиэракси, уравнениял $3x-2=13$ он ӯкси юури (5), уравнениял $x^2+2=3x$ он какси юурда (1 и 2), уравнениял $(x-1)(x-2)(x+1)=0$ он колме юурда (1, 2 и -1)[1]) и м. и. Война даже случчиэксех, что уравнениял вовсе эй оле юурда. Мойне он, примиэракси, уравнения $x^2=-4$; миттўйстă положительнойда или отрицательнойда числуа мўŏ эммă ни панис x-н сиях, сен числан квадратта эй вой олла отрицательной числа.

Уравнениял, выведитул ўлёмбăнă миăн задуачан условиёйс, он юури 6. Се он-ги отвиэтта задуачан вопроссах. Тотта, 6 вуувен пройдихуо туатол ройх 46 вуотта, а пойял 23 вуотта, с. о. кахта кердуа вăхемби.

Тăх луадух, эрăхиэн задуачойн решшимизес он полезно применяйя уравнениёйн луадимиста и опастуо нийдă решшимăх; и сидă варойн пидăў туннустуаксех уравнениёйн эрăхиэн общолойн свойствиэн ке.

Решиммă примиэракси ўлембăнă туувун уравнениян:

$$40+x=2\ (17+x).$$

Авуамма скобкат уравнениян хурас пуолес:

$$40+x=34+2x.$$

Пуоленнамма уравнениян молеммис пуолис x; суамма

$$40=34+x.$$

Пуоленнамма, яльгимăй, уравнениян молеммис пуолис 34-н; суамма:

$$6=x, \text{ и значит, } x=6.$$

Иҗмуга, миăн уравнениян монен преобразованиян каути саймма x-л значениян 6.

Примерно тăх луадух, куй мўŏ нăеммă иэл, решитăх и тойзиэ уравнениёй.

Упражнениат.

149. Миттўйзиэ нăйс равенствойс войби сануо тождествойкси и миттўйзиэ — уравнениёйкси:

$$x+y=y+x,\qquad (a-b+x)c=ac-bc+xc;$$
$$3a-4=2a+1;\qquad 8x+1=5x+7;\ a(bc)=abc;$$
$$2x=x+1;\qquad (xy):y=x;\ a:2b=\frac{a}{2}:b?$$

81. Равносильнойт уравнениат. Кахта уравнениюа санотах равносильнолойкси, если ўхтен уравнениян кай юурет оллах и тойзен уравнениян юурилойна, и яриллех, тăмăн тойзен уравнениян кай юурет оллах энзимăйзен уравнениян юурина.

Примиэракси, какси уравнениюа:

$$x^2+2=3x \text{ и } 3x-2=x^2$$

---

1) Мустойтамма, что если ўкси миттўйне-тахто сомножителя он нолян суурус, то и произведения он нолян сууруус и яриллех.

оллах равносильнойт, сентӑх куй нийл оллах ӱхтет и самат юурет, именно 1 и 2; уравненият же

$$7x = 14 \text{ и } x^2 + 2 = 3x$$

эй олла равносильнойт, сентӑх куй энзимӑйзел он вай ӱкси юури 2, силлой куй тойзел, пайчи тӑдӑ юурда, он виэ тойне юури 1.

Конза мӱӧ уравнениюа решшиес луаимма сил эрӑхиэ преобразованиёй, то мӱӧ аннетун уравнениян последовательно ваехтамма тойзил, простоймміл уравнениёйл, сих суате, куни эммӑ суа кайкис простойимман видан уравнениюа: $x = a$; силлой мӱӧ саномма, что тӑмӑ числа a он аннетун уравнениян юури. Но утверждайя тӑмӑн ошибкатта мӱӧ воймма вай силлой, конза мейл он уверенности, что кай преобразуйес суавут уравненият оллах равносильнойт аннетун ке.

Преобразованият, кудамиэ мейл пидӑӱ луадиэ уравнениёйн ке, оллах основывайдут уравнениян кахтех свойствах, кудамиэ мӱӧ нӱгӧй рубиэмма каччомах.

82. Уравнениёйн энзимӑйне свойства. Отамма миттӱйзентахто уравнениян, примиэракси, ненгойзен:

$$x^2 + 2 = 3x. \tag{1}$$

Саномма, что тӑмӑн уравнениян молембих пуолих пидӑӱ лизӑтӑ ӱкси и сама числа m (положительной, отрицательной или ноля); силлой мӱӧ суамма уувен уравнениян:

$$x^2 + 2 + m = 3x + m. \tag{2}$$

Докажимма, что тӑмӑ уравнения он равносильной аннетун уравнениян ке. Сидӑ варойн пидӑӱ вай убедиэксех, энзимӑй сих нӑх, что уравнениян (1) ёга юури удовлетворяйччоу и уравнениян (2); и, тойзекси, яриллех, сих нӑх, что уравнениян (2) ёга юури удовлетворяйччоу и уравнениян (1).

а) Олгах уравнениял (1) миттӱйне-тахто юури, примиэракси $x = 1$. Тӑмӑ знуаччиу, что конза сих уравнениях x-н сиях панемма 1, то выражения $x^2 + 2$ ройх ӱхтен суурус выражениян ке $3x$ (ёга найс выражениёйс мууттуу числакси 3). Но силлой, конза $x = 1$, суммат $x^2 + 2 + m$ и $3x + m$ лиэтӑх ӱхтен суурует, сентӑх куй, если ӱхтен сууруйзих числойх (3 и 3) лизиӑммӑ ӱхтен и саман числан (m), то и суамма ӱхтен суурует числат $(3 + m$ и $3 + m)$. Значит, юури $x = 1$ должен олла муга же и уравнениян (2) юурена. Если уравнениял (1) он виэ миттӱйне-тахто юури, то сих нӑх войби сануо сидӑ же самуа, мидӑ мӱӧ васта санойимма юурех нӑх $x = 1$, с. о. что се удовлетворяйччоу и уравнениян (2). Тӑмӑн мугах, уравнениян (1) ёга юури он и уравнениян (2) юурена.

б) Олгах нӱгӧй уравнениял (2) миттӱйне-тахто юури, примиэракси $x = 2$. Се знуаччиу, что если тӑх уравнениях x-н сиях панемма 2, то выражения x^2+2+m ройх выражениян ке $3x+m$ ӯхтен сууруйне (именно, ёга найс выражениёйс мууттуу числакси $6+m$). Но конза $x=2$, выраженият x^2+2 и $3x$ лиэтāх ӯхтен сууруйзикси, сентāх куй если ӯхтен сууруйзис числойс ($6+m$ и $6+m$) пуоленнамма ӯхтен и саман числан (m), то и суамма ӯхтен сууруот числат. Значит, $x=2$ он муга же и уравнениян (1) юури. Если бы уравнениял (2) олис виэ миттӯйнетахто юури, то сих нāх войс сануо сен же саман, мидā мӯӧ санойммa юурех нäх $x=2$, с. о. и тāмā тойне юури должен удовлетвориэ уравнениян (1).

Значит уравнениян (2) ёга юури должен олла и уравнениян (1) юурена.

Если же уравнениёйн (1) и (2) юурет оллах ӯхтет и самат, то нāмā уравнeнияt оллах равносильнойт. Тāмā свойства относих и ӯхтен и саман числан пуолендамизех уравнениян молеммис пуолис, сентäх куй миттӯйзен-тахто числан пуолендамине он равносильной тāмāн числан лизиāннāл вастаккайзен знуакан ке.

Тāх луадух, если **уравнениян молембих пуолих лизиāммā или нийс пуоленнамма ӯхтен и саман числан, то суамма уувен уравнениян, равносильнойн энзимāйзен ке.**

83. Следствият. Тāс свойствас войби выведиэ следующойт следствият, кудамил пуаксух пидāӯ пользуйяксех уравнениёй решшиес.

1. Уравнениян членой войби сийреллā ӯхтес пуолес пāй тойзех, мууттаен мойзиэн членойн иэс знуакат вастаккайзикси.

Примиэракси, лизāттӯӧ уравнениян

$$8+x^2=7x-2$$

молембих пуолих 2-ин, суамма:

$$8+x^2+2=7x.$$

Члена -2 ойгиэс пуолес пāй сийрдӯй хурах вастаккайзен $+$знуакан ке.

Пуолендахуо яльгимāйзес уравнениянс x^2, суамма:

$$8+2=7x-x^2.$$

Члена $+x^2$ сийрдӯй хурас пуолес пāй ойгиэх вастаккайзен знуакан ке.

2. Если какси ӯхтен мойста членуа ӯхтен мойзиэн знуакойн ке оллах уравнениян эри пуолилойс, то мойзет членат войби хäвиттиä.

Примиэракси, если он аннетту уравнения

$$6x+3=x^2+3,$$

то пуолендахуо тӓмӓн уравнениян молеммис пуолис 3-ин, суамма:

$$6x = x^2.$$

84. Уравнениейн тойне свойства. Отамма сен же уравнениян

$$x^2 + 2 = 3x \qquad (1)$$

и умножимма сен молеммат пуолет миттӯйзел-тахто числал m, положительнойл или отрицательнойл (но эй нолял). Силлой суамма уувен уравнениян:

$$(x^2 + 2)\,m = 3xm. \qquad (2)$$

Чтобы выясниэ, оллах-го нӓмӓ какси уравнениюа равносильнойт, рубиэмма рассуждайччемах точно муга же, куй мӯӧ рассуждайчимма энзимӓйзех свойствах нӑх, а именно: озутамма энзимӓй, что уравнениян (1) ёга юури удовлетворяйччоу уравнениян (2), и, тойзекси, яриллех: уравнениян (2) ёга юури удовлетворяйччоу уравнениян (1).

а) Олгах уравнениял (1) миттӯйне-тахто юури, примиэракси $x = 1$. Тӓмӓ знуаччиу, что конза тӑх уравнениях x-н сиях панемма 1, то выражения $x^2 + 2$ ройх ӯхтен суурус выражениян ке $3x$ (ёга нӓйс выражениейс мууттуу числакси 3). Но силлой, если $x = 1$, то и произведенияn $(x^2 + 2)\,m$ и $3xm$ лиэтӑх ӯхтен сууруйзикси, сентӑх куй если ӯхтен сууруот числат (3 и 3) умножимма ӯхтел и самал числал (m), то и суамма ӯхтен сууруот числат ($3m$ и $3m$). Значит, юури $x = 1$ должен олла муга же и уравнениян (2) юурена. Сентӑх куй кайкен тӓмӓн вой повториэ и ёгахизен муун уравнениян (1) юурех нӑх, то заключайчемма, что уравнениян (1) ёга юури он уравнениян (2) юурена.

б) Яриллех, олгах уравнениял (2) миттӯйне-тахто юури, примиэракси $x = 2$. Тӓмӓ знуаччиу, что если тӑх уравнениях x-н сиях панемма 2, то произведенияt $(x^2 + 2)m$ и $3xm$ ройтахес ӯхтен сууруйзикси, (ёгахине нийс мууттуу числакси $6m$). Но силлой, конза $x = 2$, то и выраженият $x^2 + 2$ и $3x$ ройтахес ӯхтен сууруйзикси, сентӑх куй если ӯхтен сууруот числат ($6m$ и $6m$) юама ӯхтел и самал числал m, кудама эй оле нолян суурус, то и суамма ӯхтен сууруот числат. Значит, юури $x = 2$, куй и уравнениян (2) ёга юури, он муга же и уравнениян (1) юурена; сентӑх нӓмӓ уравненият оллах равносильнойт.

Предположимма нӯгӧй, что числа m, кудамал мӯӧ умножимма уравнениян молеммат пуолет, он н о л я н с у у р у с. Примиэракси, умножимма нолял уравнениян $x^2 + 2 = 3x$ пуолет, кудамал он какси юурда: 1 и 2; мӯӧ суамма силлой уувен уравнениян:

$$(x^2 + 2) \cdot 0 = 3x \cdot 0.$$

Тӓл уравнениял удовлетворитах эй вай 1 и 2, но и ёга произвольной x-н значения. Муга, пандуо x-н сиях числат 5, 6 и м. и., суамма:

$$(5^2+2)\cdot 0=3\cdot 5\cdot 0;\ (6^2+2)\cdot 0=3\cdot 6\cdot 0,$$

с. о. $$27\cdot 0=15\cdot 0;\ 38\cdot 0=18\cdot 0,$$

или $$0=0;\ 0=0$$

(сентӓх куй ёга числан произведения нолял ои ноля). Значит нолял умножиндан периӓ уравиениян равносильности риккоудуу.

Тӓх луадух, если уравиеиияи молеммат пуолет мӱӧ умножимма или юамма ӱхтел и самал эй иоляи сууруол числал, то суамма уувеи уравиеиияи, равиосильиойи эизимӓйзеи ке.

85. **Следствият.** Уравнениейн тойзес свойствас войби выведиэ тӓмӓн мойста колме следствиюа:

1. **Если уравиеиияи кайкил члеиойл ои ӱхтехиие, эй нолян суруйие миожителя, то уравнениян кай члеиат войби ягуа сил.** Примиэракси:

$$60x-160=340-40x.$$

Ягахуо молеммат пуолет 20-л, суамма простоймман уравнеииян:

$$3x-8=17-2x.$$

2. **Уравиеиияи войби пиӓстиӓ мойзис дробиолойс члеиойс, кудамиэи зиамеиателёйс эй оле тиэдӓмӓтӧндӓ.** Примиэракси:

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6}.$$

Приведимма кай членат ӱхтехизех знаменателях:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12};\quad \text{или:}\ \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Ӱхтехизен знаменателян лӱкӓттӱӧ, мӱӧ сил самал умножимма уравнениян молеммат пуолет ӱхтел и самал, эй нолян сууруол числал (12); тӓс суамма уравнениян, равносильнойн аннетун ке:

$$14x-6-(3x-15)=86,\ \text{или}\ 14x-6-3x+15=86.$$

3. **Уравиеиияи кайккиэн члеиойи иэс войби мууттуа зиуакат вастаккайзикси,** сентӓх куй тӓмӓ он ӱксикай, куй умножиэ уравнениян молеммат пуолет -1-л. Примиэракси, луадихуо уравнениян $-8-x^2=-7+2$ пуолилойн ке тӓмӓн мойзен умножиннан, суамма: $8+x^2=7-2$.

86. **Уравиеиияи пуолиэи умиожиида или юаида ӱхтел и самал алгебраическойл выражениял.** Тойчи пидӓӱ аннетун уравнениян преобразуйчендуа варойн умножиэ (или ягуа) сен молеммат

пуолет ӱхтел и самал алгебраическойл выражениял (следующойс параграфас мӱӧ нäеммä тäх примиэран). Умножиннан яльгех суаду уузи уравнения вай силлой ройх равносильной аннетун уравнениян ке, конза се алгебраической выражения, кудамал мӱӧ умножимма (или юамма) аннетун уравнениян молеммат пуолет, эй оле нолян суурус, сентäх куй нолял умножиес уравнениян равносильности риккоудуу.

87. Виэрахат юурет. Уравнениян молеммат пуолет пидäӱ умножиэ ӱхтел и самал алгебраическойл выражениял силлой, конза мӱӧ решиммä уравнениюа мойзиэн дробилойн ке, кудамиэн знаменателёйс он тиэдäмäттöмиэ. Олгах, примиэракси, решиттäвä уравнения:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}. \qquad (1)$$

Кайккиэн дробилойн ӱхтехине знаменателя он, нäгевäйне $(x-2)^2$. Приведимма кай дробит тäх знаменателях:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2};$$

лӱккиäммä иäре сен, тойзил санойл, умножимма кай членат $(x-2)^2$-л:

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

с. о.

$$x^2+2=3x. \qquad (2)$$

Тäл уравнениял он какси юурда: 1 и 2. Но мӱӧ эммä вой ручайяксех сийт, что молеммат нäмä юурет пäтäх и первоначальнойх уравнениях нäхте, сентäх куй тäмäн уравнениян молеммат пуолет мейл пиди умножиэ выражениял $(x-2)^2$, кудама значениял $x=2$ мууттуу нолякси, а нолял умножиес уравнениейн равносильности войби риккоудуо.

Йиäӱ испытайя лöӱветӱт юурет 1 и 2, чтобы тийюстуа, пäтäх-го нäмä юурет эй вай уравнениях нäхте (2), но и уравнениях нäхте (1). Юури $x=1$ удовлетворяйччоу уравнениян (1):

$$\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=\frac{1}{1-2}+\frac{2\cdot 1+2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^2}=\frac{1}{-1}+\frac{2+2}{(-1)^2},$$

$$1+2=-1+4, \text{ с. о. } 3=3.$$

Но тойне юури, $x-2$, уравнениях нäхте (1) эй пäй, сентäх куй значениял $x=2$ се каймуау смыслан:

$$\frac{4}{0}+\frac{2}{0}=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$$

(юанда нолял он невозможной).

Тäх луадух, мӯö нäеммä, что если аннетус уравнениис он дробилой, кудамиэн знаменателят содержитах тиэдäмäтöй, и мӯö пиäзиммä нäйс знаменателёйс умножиен уравнениян молеммат пуолет ӯхтехизел знаменателял, то лöӯдäхӯö суавун уравнениян юурет, мейл пидäӯ виэ подстановкан каути испытайя нет, чтобы тийюстуа, эй-го юуриэн кескес оле виэрахиэ юуриэ.

Уравнениян молембиэн пуолиэн ягахуо ӯхтел и самал алгебраической выражениял, мӯö воймма каймата эрäхиэ юуриэ.

Примиэракси, уравнениян:

$$(2x+3)(x-3)=(3x-1)(x-3)$$

молембиэн пуолиэн ягахуо $(x-3)$-л, суамма уувен уравнениян:

$$2x+3=3x-1,$$

кудама эй родей равносильной аннетун ке, сентäх куй сил он вай ӯкси юури $x=4$, силлой куй энзимäйзел он какси юурда: $x=4$ и $x=3$.

II. Уравнения ӯхтен тиэдäмäттöмäн ке.

88. Энзимäйзен степенин уравнениейн ӯхтен тиэдäмäттöмäн ке решиндä.

Кахтел примиэрал озутамма энзимäйзен степенин уравнениейн ӯхтен тиэдäмäттöмäн ке решиннäн способан.

1. Решшиэ уравнения:

$$3x+2(4x-3)=5(x+2)-4.$$

Скобкиэн аваттуо, суамма:

$$3x+8x-6=5x+10-4.$$

Сийрäммä членат тиэдäмäттöмиэн ке хурал пуолел, а тийетӯт членат — ойгиэл (качо уравнениейн энзимäйзен свойстван следствиюа):

$$3x+8x-5x=10-4+6.$$

Приведимма подобнойт членат:

$$6x=12.$$

Яльгимäй, юамма уравнениян молеммат пуолет 6-л (уравнениейн тойзен свойстван мугах). Суамма лопуллизести:

$$x=2.$$

Чтобы убедиэксех, эммä-го мӯö луадинут миттӯйстä-тахто ошибкуа уравнениюа решшиес, пидäӯ провиэриэ решиндä. Сих нäхте панемма лöӯветӯн юурен аннеттух уравнениях x-н сиях, луаимма уравнениис озутетут действият, и если уравнения мууттуу тождествакси, то юури он лӧӱветтӱ верно. Миӓн случайс суамма:

$$3 \cdot 2 + 2(4 \cdot 2 - 3) = 5(2+2) - 4,$$

или

$$16 = 16.$$

Значит, решиндӓ он луаитту верно.

2 Решшиэ уравнения:

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{3x+2}{5} - x = \frac{7x-5}{6} - 1.$$

Приведимма кай членат ӱхтехизех знаменателях, кудама он 30:

$$\frac{15(3x-4)}{30} + \frac{6(3x+2)}{30} - \frac{30x}{30} = \frac{5(7x-6)}{30} - \frac{30}{30}.$$

Умножимма уравнениян кай членат 30-л (или, ми он сама, лӱккиӓммӓ ӱхтехизен знаменателян):

$$15(3x-4) + 6(3x+2) - 30x = 5(7x-6) - 30.$$

Авуамма скобкат:

$$45x - 60 + 18x + 12 - 30x = 35x - 30 - 30.$$

Сийрӓммӓ членат тиэдӓмӓттӧмиэн ке хурал пуолел, а тийетӱт ойгиэл пуолел:

$$45x + 18x - 30x - 35x = 60 - 12 - 30 - 30.$$

Приведимма подобнойт членат:

$$-2x = -12.$$

Юамма молеммат пуолет тиэдӓмӓттӧмӓн коэфициентал (олис войнут энзимӓй умножиэ молеммат пуолет -1-л, чтобы луадиэ нет положительнолойкси):

$$x = \frac{-12}{-2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Луаимма проверкан:

$$\frac{3 \cdot 6 - 4}{2} + \frac{3 \cdot 6 + 2}{5} - 6 = \frac{7 \cdot 6 - 6}{6} - 1; \quad 7 + 4 - 6 = 6 - 1; \quad 5 = 5.$$

Туодулойс примиэройс лӧӱвӓммӓ, что энзимӓйзен степенин уравнениян ӱхтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке решиндӓх нӓхте пидӓӱ:

1. Пиӓстиӓ уравнения дробнолойс членойс.

2. Авата скобкат.

3. Сийрдиӓ членат тиэдӓмӓттӧмӓн ке ӱхтех пуолех, а тиэтӱт членат — тойзех.

4. Луадиэ подобнолойн членойн приведимине.

5. Ягуа уравнениян молеммат пуолет тиэдӓмӓттӧмӓн коэфициентал.

Иэллех пидӑў провиэриэ, паннен юурен первоначальнойх уравнениях, он-го лӧўеттӯ решения верной.

Он тиэттӓвӓйне, что зависсиен уравнениян видас эй айнос пиэ луадиэ кайккиэ вийттӓ операциюа.

Замечания. Сен яльгех ку уравнениясь луаимма энзимӓйзет неллӓ операциюа мейл молеммил пуолил йиӓў ӯксин членойн: хурал пуолел — члена тиэдӓмӓттӧмӓн ке, ойгиэл — тиэттӯ члена. Общойс видас тӓмӓн уравнениян вой кирьюттуа ненгойзес видас:

$$ax = b,$$

кус a и b войях олла положительнолойна, отрицательнолойна или даже нолян сууруйзина числойна. Тӓмӓн зидан мойста уравнениюа санотах энзимӓйзен степенин уравнениян нормальнойкси видакси ӯхтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке.

Упражненият.

Решшиэ уравненият:

150. $2x + 1 = 35$; $19 = 4 + 3y$; $7y - 11 = 24$.

151. $3x + 23 = 104$; $89 = 11y - 10$; $38 = 2 + 3x$.

152. $3x = 15 - 2x$; $4x - 3 = 9 - 2x$; $5x + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$.

153. $2{,}5x - 0{,}86 = 4 + 0{,}7x$; $29 + 2x = (x - 7) \cdot 3$.

154. $x - 7 = \frac{3x + 13}{20}$; $-x = 3$; $-2x = 8$.

155. $\frac{2x + 1}{2} = \frac{7x + 5}{8}$; $x + \frac{11 - x}{3} = \frac{20 - x}{2}$.

156. $x + \frac{3\quad - 9}{5} = 11 - \frac{15x - 12}{3}$.

157. $3x - 4 - \frac{4(7x - 9)}{15} = \frac{4}{5}\left(6 + \frac{x - 1}{3}\right)$.

158 $2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}$.

159. $\frac{x - 1}{7} + \frac{23 - x}{5} = 2 - \frac{4 + x}{4}$.

89. Понятия уравнениёйн луаиндах нӓх. Уравнениёйн авул войби кебиэмбӓх решшиэ мойзиэ задуаччой, кудамиэ арифметически он решшиэ югиэмби или даже вовсе эй суа решшиэ. Кай трудности он сийт, куй луадиэ мойне уравнения, кудаман решшимине андайс эчиттӓвӓн отвиэтан. Общойда уравнениёйн луаинда способуа эй суа озуттуа, сентӓх куй задуачойн условият войях олла ӯлен различнойт. Войби вай озуттуа эрӓхих общолойн уравнениёйн луаиннан примиэройх задуачан аннеттулой мӯӧте. Вообще тӓс навыкан андау вай практикка.

Озутамма примиэран авул уравнениёйн луаиннан общойт приёмат.

Задуачча. Школа ости хиэнолой и яриэлӧй тетраттилой кайккиэдах 80 штууккуа. Яриэ тетратти максау 35 коп., хиэно

4 коп. Äйя-го оли остетту яриэлōй и äйя-го хиэнолой тетраттилой, если он максетту 9 р. 40 к?

1. Определимма, кудаман тиэдāмäттōмис величинойс обозначимма x-н каути.

Миäн задуачас он какси тиэдāмäттōмиä: яриэлōйн и хиэнолойн тетраттилойн лугу. Обозначимма x-н каути, примиэракси, яриэлōйн тетраттилойн лувун. Сентāх куй кайккиэ тетраттилой он 80, то хиэнолой ройхес $80-x$.

Яриэлōйн тетраттилойн лугу он x,

Хиэнолойн тетраттилойн „ „ $80-x$.

2. Выразимма математически x-н и задуачас аннеттулойн числойн авул кай задуачан условият.

Миäн задуачас он санотту, что яриэ тетратти максау 35 коп., а хиэно 4 коп. Следовательно, мӯō воймма андуа вопросан, äйя-го максетах кай остетут яриэт и хиэнот тетратит (мойзен вопросан мӯō азетамма сентāх, что задуачас он аннетту кайккиэн тетраттилойн стоимости).

Яриэлōйн тетраттилойн стоимости он $35x$ коп.
Хиэнолойн „ „ „ $4(80-x)$ коп.
Ӯхтехине „ „ „ 9 р. 40 к.

3. Луаимма уравнениян.

Сентāх куй задуачас он санотту, что тетраттилойн ӯхтехине стоимости он 9 р. 40 к., то яриэлōйн тетраттилойн стоимостин $35x$ и хиэнолойн $4(80-x)$ сумма должен андуа точно 9 р. 40 к.:

$$35x+4(80-x)=940.$$

Тāмāн уравнениян решшихӯō, суамма x варойн числан 20.

x-н каути мӯō обозначимма яриэлōйн тетраттилойн лувун.

Следовательно, яриэлōй тетраттилой оли остетту 20, а хиэнолой

$$80-20=60 \text{ тетраттиэ.}$$

Замиэтимма, что задуачас он обычно даннолой сен верда, мин верда нийдä пидāӯ уравнениян луадимизех нäхте. Сентāх, уравнениян луадихуо, он полезно качахтуаксех, он-го кай задуачан даннойт используйду, с. о. кай-го задуачас аннетут числат сийт или тāс формас тулдих уравнениях.

Упражнеқият.

160. Кахтен числан сумма он 2548; лōӯдиä нет числат, если он тиэтойс, что ӯкси нийс он 148 пиэнемби тойста.

161. Колмен лизäттäвäн сумма он 100; тойне лизäттäвä он 10 суурембы энзимäйстä, а колмас 20 суурембы тойста. Лōӯдиä нäмä лизäттäвäт.

162. Раччахал аяя табуау ялганиэккуа, кудама он 15 км иэл хäндä. Äйян-го чуасун пройдихуо раччахал аяя табуау ялганиэкан, если ёга чуасус энзимäйне аяу 10-н *км*, а тойне астуу вай 4 *км*?

163. Кахтес чуаю сортас он луаитту севотуста 32 *кг*. Килограмма энзимäйстä сортуа максау 8 руб., а тойста 6 р. 50 коп. Äйя-го килограммуа он отетту

ёга сортуа, если килограмма севотуста (барышатта и убыткатта) максау 7 р. 10 коп?

164. Велосипедиста аёй эрäхäн маткан скоростин ке 8 *км* чуасус. Ярилех хäнел нидн аюа тойста дорогуа мÿöте, кудама оли 3 *км* питкемби энзимäйстä, и хотя хäн ярилех пäй аёй 9 *км* чуасус, но айгуа мäни $7\frac{1}{2}$ минуттуа энäмби. Мин питкÿöт олдих молеммат дорогат?

90. Буквеннойт уравнениит. Эй оле обязательно, чтобы тиэдäмäтöй айнос обозначиттайс буквал x: сен войби обознуаччиэ и миттÿйзел-тахто тойзел буквал. Отамма, примиэракси, формулан:

$$s=\frac{1}{2}bh,$$

кудама выражайччоу сен треугольникан площадиэ s, кус основания он b линейнойда единицуа и коргевус h сен же мойста единицуа. Тäмä формула представляйччоу уравнениюа, кудамас ёгахине числойс s, b и h вой олла отеттуна тиэдäмäттöмäкси. Олгах, примиэракси, аннетту ненгойне задуачча: лöÿдиä мойзен треугольникан основания, кудаман коргевус он h миттÿйстäтахто линейнойда единицуа. Силлой миäн формулас числа b должен олла тиэдäмäттöмäнä, а числат s и h тиэттÿлöйнä. Тиэттäвäйне, мÿö воймма тиэдäмäттöмäн основанияn обознуаччиэ буквал x и кирьюттуа уравнениян ненга:

$$s=\frac{1}{2}hx,$$

кус пäй

$$x=s:\frac{1}{2}h=2s:h=\frac{2s}{h}.$$

Но войби ваехтаматта b буквуа x-л, ойгиэх уравнениас $s=\frac{1}{2}bh$ определиэ b-н s и h-н каути:

$$s=\frac{1}{2}bh;\quad 2s=bh;\quad b=\frac{2s}{h}.$$

Вообще пидäÿ привыкниэ решшимäх эй вай численнолой уравнениёй, кудамис аннетут числат оллах выразитут цифройл, а тиэдäмäтöй буквал x, но и буквеннолой уравнениёй, кудамис аннетут числат и тиэдäмäттöмäт оллах обознуачитут любойлойл буквил.

Примиэрат.

1. $a+bx=c;$
$bx=c-a;$
$x=\frac{c-a}{b}.$

2. $a(x-c)=b(x+d);$
$ax-ac=bx+bd;$
$ax-bx=bd+ac;$
$x(a-b)=bd+ac;$
$x=\frac{bd+ac}{a-b}.$

3. $\frac{y}{a} - y = b$; 4. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$;

$y - ay = ab$; $bx + ax = ab$;

$y(1 - a) = ab$; $x(b + a) = ab$;

$y = \frac{ab}{1 - a}$. $x = \frac{ab}{a + b}$.

Упражненият.

165. $(a + x)(b + x) = (a - x)(b - x)$.
166. $(x - a)(x + b) + c = (x + a)(x - b)$.
167. Уравнеияс: $a + bx = 4 - 3(a - x)$ лӧӯдиа x a-н и b-н каути.
168. Трапециян, кудаман основаният оллах b_1 и b_2, а коргевус h, площади q определитах формулан: $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ мугах. Лӧӯдиа тäс пäй h q, b_1 и b_2 каути.

III. Энзимäйзьн степенин уравнениейн системат.

Кахтен уравнениян система кахтен тиэдäмäттӧмäн ке.

91. Задуачча. Опытан авул он лӧӯветтӯ, что 148 *кг* югевус слитка, кудама состоиу хобиэс и васкес каймуау веес $14\frac{2}{3}$ *кг* виэссуа. Определиэ, äйя-го сийт он хобиэда и äйя-го васкиэ, если он тиэтойс, что 21 *кг* хобиэда веес каймуау 2 *кг*, а 9 *кг* васкиэ кайматах 1 *кг*.

Саномма, что аннетус слиткас он x *кг* хобиэда, а васкиэ y *кг*. Силлой ӯкси уравнения ройх:

$$x + y = 148.$$

Тойзен уравнениян луадимизех нäхте отамма вниманиях, что, если 21 *кг* хобиэда каймуау веес 2 *кг* виэссуа, то тäмä знуаччиу, что 1 *кг* хобиэда каймуау веес $\frac{2}{21}$ *кг*. Силлой x *кг* должен каймата веес $\frac{2}{21}x$ *кг* виэссуа.

Тäмäн луадух, если 9 *кг* васкиэ кайматах веес 1 *кг*, то тäмä знуаччиу, что 1 *кг* васкиэ каймуау $\frac{1}{9}$ *кг*; следовательно, y *кг* васкиэ кайматах $\frac{1}{9}y$ *кг*.

Сентäх тойне уравнения ройх:

$$\frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Мӯӧ саймма, значит, какси уравнениюа кахтен тиэдäмäттӧмäн ке:

$$x + y = 148 \text{ и } \frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = \frac{44}{3}.$$

Тойзен уравнениян войби упростиэ, пиäстäхӯӧ сен дробилойс. Сих нăхте приведимма кай дробит ўхтехизех знаменателях:

$$\frac{6}{63}x+\frac{7}{63}y=\frac{924}{63}.$$

Нўгӧй умножимма уравнениян молеммат пуолет 63-л, мин яльгех суамма равносильнойн уравнениян:

$$6x+7y=924.$$

Мейл он нўгӧй какси уравнениюа:

$$x+y=148 \text{ и } 6x+7y=924.$$

Мўӧ воймма нăмă уравненият решшиэ энăммăл способал. Примиэракси, энзимăйзес уравнениях x-н определимма y-н каути:

$$x=148-y.$$

Сентăх куй тойзес уравнениях букват x и y обозначайях нийдă же числой, куй и энзимăйзес, то воймма тойзех уравнениях панна x-н сиях разностин $148-y$:

$$6\ (148-y)+7y=924.$$

Решиммă тăмăн уравнениян ўхтен тиэдăмăттӧмăн ке:

$$888-6y+7y=924; \qquad y=924-888=36.$$

Силлой:

$$x=148-36=112.$$

Тăдă мўӧте, аннетус слиткас он 112 *кг* хобиэда и 36 *кг* васкиэ.

92. Энзимăйзен степенин уравнениян кахтен тиэдăмăттӧмăн ке нормальной вида. Отамма ненгойзен уравнениян примиэран кахтен тиэдăмăттӧмăн ке:

$$2\ (2x+3y-5)=\frac{5}{8}\ (x+3)+\frac{3}{4}\ (y-4).$$

Чтобы упростиэ тăмă уравнения, луаимма сийт нет же преобразованият, кудамат олдих энне озутетту ўхтен тиэдăмăттӧмăн ке, а именно:

1. Авуамма скобкат:

$$4\,x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3.$$

2. Пиăземмă знаменателейс, умножиен кай членат 8-л:

$$32x+48y-80=5x+15+6y-24.$$

3. Сийрăммă тиэдăмăттӧмăт членат уравнениян ўхтех пуолех, а тиэтўт тойзех:

$$32x+48y-5x-6y=15-24+80:$$

4. Приведимма подобнойт членат:

$$27x+42y=71.$$

Тāмāн мугах, аннетту уравнения озутеттулойн преобразованиейн яльгех ройх мойне, кудамас уравнениян хурал пуолел он вай какси членуа: ӯкси тиэдāмāттōмāн x-н ке (энзимāйзес степенис) и тойне тиэдāмāттōмāн y-н ке (энзимāйзес степенис), уравнениян же ойгиэс пуолес он вай ӯкси члена, кус эй оле тиэдāмāттōмиэ. x-н и y-н коэфициентат войях олла или молеммат положительнойт (куй миāн примиэрас), или молеммат отрицательнойт (тāмāн случайн, впрочем, вой туува васта оллуох случайх, умножихуо уравнениян кай членат -1-л), или ӯкси положительной, а тойне отрицательной; ойгиэс пуолес олия члена вой олла или положительнойна числана (куй тāс примиэрас) или отрицательнойна и даже ноляна. x-н и y-н коэфициентойн обознуаччихуо буквил a и b и членан, кудамас эй оле тиэдāмāттōмиэ, буквал c, мӯō воймма энзимāйзен степенин уравнениян ӯхтен тиэдāмāттōмāн ке общойс видас предстуавиэ ненга:

$$ax + by = c.$$

Тāмāн мойста уравнениян видуа санотах энзимāйзен степенин уравнениян кахтен тиэдāмāттōмāн ке *нормальнойкси* видакси.

93. Ӯхтен уравнениян кахтен тиэдāмāттōмāн ке неопределённости. Ӯхтел уравнениял кахтен тиэдāмāттōмāн ке он лувутой множества юуриэ. Действительно, если ӯхтел миттӯйзел-тахто тиэдāмāттōмāл мӯō назнуачимма произвольнойн числан и панемма тāмāн числан уравнениях, то силлой мӯō суамма уравнениян ӯхтен тойзен тиэдāмāттōмāн ке, кудаман и войби лōӯдиā тāс уравненияс. Назнуаччихуо энзимāйзел тиэдāмāттōмāл миттӯйзен-тахто тойзен числан, мӯō муга же суамма тойзех тиэдāмāттōмāх нāхте уувен числан и м. и. Тāх луадух, мӯō воймма суаха мин-тахто пуаруа решениейн.

Олгах, примиэракси, мейл аннетту ненгойне задуачча: лōӯдиā равнобедреннойн треугольникан сторонат, если периметра он 40 *м*. Тāмāн треугольникан основаниян питкевӯōн обознуаччихуо буквал x и ёга сен боковойн сторонан питкевӯōн буквал y, мӯō воймма кирьюттуа уравнениян: $x + 2y = 40$.

Назнуачимма x-л миттӯйзен-тахто произвольнойн числан, примиэракси 10. Силлой лōӯвāммā: $10 + 2y = 40$; $2y = 30$, $y = 15$. Значит, если треугольникан основания ройх 10 *м*, то сен ёга боковой сторона должен олла 15 *м*. Назнуачимма нӯгōй x-л миттӯйзен-тахто тойзен числан, примиэракси 8. Силлой $2y = 32$ и $y = 16$. Тāх луадух, мӯō воймма лōӯдиā мин верран тахто решениейн, и следовательно, уравнения и задуачча оллах неопределённойт.

94. Уравнениейн система. Он приймиттӯ сануо, что мони уравнениюа луаитах система, если кайкис нāйс уравнениейс ёгахине буквис x, y ... означайччоу ўхтă и самуа числуа кайкких уравнениёйх нăхте. Если, примиэракси, кахта уравнениюа

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2; \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

качеллах сен условиян ке, что буква x означайччоу ўхтă и самуа числуа молеммис уравнениёйс, а муга же и буква y, то мойзет уравненият луаитах система. Тăмă он айнос сийт случайс, конза уравненият оллах луаитут ўхтен и саман задуачан условиёйс.

Озутамма какси энзимăйзен степенин уравнениёйн кахтен тиэдăмăттӧмăн ке решиндă способуа.

95. Подстановка способа. Тăдă способуа мўӧ ё применяйчимма энне, конза решиммă задуаччуа хобиэ и васки слитках нăх.

Отамма нўгӧй сложноймман примиэран:

$$8x - 5y = -16; \; 10x + 3y = 17.$$

(Молеммат уравненият он туоду нормальнойх видах.)

Ўхтес уравнениыс, примиэракси энзимăйзес, определимма ўхтен миттўйзен-тахто тиэдăмăттӧмăн, примиэракси y, тойзен каути:

$$y = \frac{8x + 16}{5}. \text{ [1]}$$

Сентăх куй тойне уравнения должен удовлетворяйяксех нийл же значениёйл куй и энзимăйне, то мўӧ воймма панна сих y-н сиях лӧўветўн выражениян, мин периă суамма уравнениян ўхтен тиэдăмăттӧмăн x-н ке:

$$10x + 3 \cdot \frac{8x + 16}{5} = 17.$$

Решиммă тăмăн уравнениян:

$$10x + \frac{24x + 48}{5} = 17; \quad 50x + 24x + 48 = 85; \quad x = \frac{1}{2}.$$

Силлой:

$$y = \frac{8x + 16}{5} = \frac{4 + 16}{5} = 4.$$

Мўӧ войннузимма определиэ ўхтес уравнениыс тиэдăмăттӧмăн x y-н каути и суавун выражениян панна x-н сиях тойзех уравнениях; силлой мўӧ суаннузимма уравнениян тиэдăмăттӧмăн y-н ке.

Тăмă способа он особенно удобной силлой, конза миттўйне-тахто тиэдăмăттӧмăн коэфициента он 1. Силлой он парас определиэ тăмă тиэдăмăтӧй тойзен тиэдăмăттӧмăн каути (эй пиэ ягуа коэфициентал). Примиэракси:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

---

[1] Тăмăн формулан суаес мўӧ сийриммă членан — $5y$ ойгиэх пуолех, а членан 16 хурах пуолех, сен яльгех уравнениян молеммат пуолет явоймма 5-л и ваехтимма уравнениян пуолиэн сият. Пидăў привыкниэ луадимах нăмă муутоксет кирьюттаматта.

Тойзес уравнениэс лӧӱвӓммӓ: $y = 22 - 4x$.

Силлой энзимӓйне уравнения андау:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11;\ 3x - 44 + 8x = 11;\ 11x = 44 + 11 = 55;$$
$$x = \frac{55}{11} = 5;\ y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Правила. **Чтобы решшиэ энзимӓйзен степенин уравнениёйн система кахтеи тиэдӓмӓттӧмӓн ке подстановка способан авул, пидӓӱ определиэ миттӱйзес-тахто уравиениэс ӱкси тиэдӓмӓтӧй тойзен каути и суаду выражения панна тойзех уравнениях; тӓс ройхес уравнения ӱхтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке. Решшихӱӧ се, лӧӱветӓх тӓмӓ тиэдӓмӓтӧй. Лӧӱветӱн числан пандуо выражениях, суадух энне энзимӓйзех тиэдӓмӓттӧмӓх нӓхте, лӧӱветӓх и тӓмӓ тойне тиэдӓмӓтӧй.**

96. Алгебраическойн лизиӓннӓн способа. Олгах саномма энзимӓй, что аннетус уравнениёйн системас (кудамат оллах привeдитут нормальнойх видах) миттӱӧн-тахто тиэдӓмӓттӧмӓн, примиэракси, y-н коэфициентат отличайяхес вай знуакойл. Примиэракси, олгах аннетту система:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27; \\ 5x + 2y = 23. \end{cases}$$

Мӱӧ тийяммӓ, что если ӱхтен сууруйзих числойх лизиӓммӓ (или нийс пуоленнамма) ӱхтен сууруот числат, то и суамма ӱхтен сууруот числат. Сентӓх, если мӱӧ лизиӓммӓ (или пуоленнамма) аннеттулойн уравнениёйн хурат пуолет кескенӓх и ойгиэт пуолет кескенӓх, то равенства знуакка эй риккоуду (тӓмӓ лӱхемби выражайях ненга: уравнeният войби членоттай лизӓтӓ или пуолендуа).

Тӓмӓн замиэттихуо, лизиӓммӓ аннетут уравнeният ӱхтех, силлой членат $-2y$ и $+2y$ тойне тойзен ке хӓвитӓх и мӱӧ суамма ӱхтен уравнениян тиэдӓмӓттӧмӓн x-н ке:

$$+\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases}$$
$$\overline{12x \qquad\quad = 60}, \text{ кус } x = 5.$$

Пандуо ӱхтех аннеттулойс уравнениёйс x-н сиях сих нӓхте лӧӱветӱн числан 5, суамма уравнениян, кудамас лӧӱвӓммӓ y-н: $7 \cdot 5 - 2y = 27$; $35 - 2y = 27$; $35 - 27 = 2y$; $8 = 2y$; $y = 4$

Если уравнениёйс хӓвитеттӓвӓн тиэдӓмӓттӧмӓн иэс олдайс ӱхтен мойзет и коэфициентат и знуакат, то, мууттахуо ӱхтес миттӱйзес-тахто уравнениэс кайккиэн членойн иэс знуакат вастаккайзикси, мӱӧ туозимма тӓмӓн случайн васта вай качелтух. Муга, если он аннетту система:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8; \\ 3x + 7y = 32, \end{cases}$$

кудамас тиэдӑмӓттӧмӓн x-н иэс молеммис уравнениёйс он ӯхтен мойне коэфициента $+3$, то мӯӧ муутамма, саномма, энзимӓйзес уравненияс знуакат вастаккайзикси (тойзил санойл, умножимма уравнениян молеммат пуолет — 1-л) и сен яльгех лизиӓммӓ уравнениятӯхтех[1]):

$$+\left\{\begin{aligned} -3x+5y&=-8\\ 3x+7y&=\quad 32\end{aligned}\right.$$
$$12y=24,\quad y=2,$$
$$3x+7\cdot 2=32;\ 3x=32-14=18;\ x=6.$$

Отамма нӯгӧй системан, кудамас коэфициентат оллах различнойт, примиэракси тӑмӓн мойзен:

$$\left\{\begin{aligned} 7x+6y&=29;\\ -5x+8y&=10.\end{aligned}\right.$$

Мӯӧ воймма силлой энзимӓй луадиэ миттӯйзен-тахто тиэдӓмӓттӧмӓн, примиэракси x-н коэфициентойн абсолютнойт величинат ӯхтен сууруйзикси. Сих нӓхте лӧӯвӓммӓ коэфициентойн 7 и 5 кратнойн (паремби — пиэнеммӓн, се ройх 35) и умножимма ёга уравнениян молеммат пуолет соответствующойл дополнительнойл множителял (куй се луаитах дробилой приведиес ӯхтехизех знаменателях):

$$\left\{\begin{aligned} 7x+6y&=29\ \ (5\text{-л});\\ -5x+8y&=10.\ \ (7\text{-л}),\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} 35x+30y&=145;\\ -35x+56y&=70,\end{aligned}\right.$$

и силлой тӓмӓ случай приведихес васта вай качоттух случайх.

Правила. **Чтобы решшиэ кахтен уравнениян система кахтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке алгебраическойн лизиӓннӓн способан авул, энзимӓй аннеттулойс уравнениёйс луаитах миттӯйзен-тахто ӯхтен тиэдӓмӓттӧмӓн иэс коэфициентойн абсолютнойт величинат ӯхтен сууруйзикси, и сийт случайс, конза тӓмӓн тиэдӓмӓттӧмӓн иэс знуакат оллах ӯхтен мойзет, муутетах ӯхтес уравнениях знуакат вастаккайзикси. Лизӓттӯӧ сен яльгех уравненият, суахах ӯкси уравнения ӯхтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке, кудама и определитах тӓс уравнениях пӓй. Пандуо лӧӯветтӯ числа ӯхтех аннеттулойс уравнениёйс, лӧӯветӓх сен яльгех и тойне тиэдӓмӓтӧй.**

97. Уравнениёйн система буквеннолойн коэфициентойн ке. Тойчи пидӓӯ решшиэ мойне уравнениёйн система, кудамас коэфициентат оллах выразитут буквил. Пидӓккӓх, примиэракси, решшиэ уравнения:

$$\left\{\begin{aligned} ax+by&=c\\ a'x+b'y&=c'.\end{aligned}\right.$$

---

1) **Тиэттӓвӓйне**, мууттуа уравнениян кайккиэн членойн иэс знуакат вастаккайзикси и сен яльгех лизӓтӓ се тойзен уравнениян ке, он ӯксикай, куй пуолендуа се членойттай тӓс тойзес уравнениях.

Мӯб тāмāн системан воймма решшиэ любойл кахтес способбас, озутетус системах нäхте числоволойн коэфициентойн ке. Простоймби кайккиэ тāс случайс он примениэ алгебраическойн лизиāннāн способуа, с. о. луадиэ ненга: мууттуа ӯхтес уравненияс знуакат вастаккайзикси, луадиэ ӯхтен тиэдāмāттōмāн, примиэракси y-н коэфициентойн абсолютнойт величинат ӯхтен сууруйзикси, и лизāтā молеммат уравненият ӯхтех:

$$\begin{array}{rl} ax + by = c & \Big| \begin{array}{c} b' \\ b \end{array} \Big| \\ -a'x - b'y = -c' & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ab'x + bb'y = & b'c \\ -a'bx - bb'y = & -bc' \\ \hline (ab' - a'b)x \quad = & b'c - bc' \end{array}$$

кус пäй лōӯвāммā:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - ab}.$$

Муга же лōӯвāммā y:

$$\begin{array}{rl} ax + by = c & \Big| \begin{array}{c} a' \\ a \end{array} \Big| \\ -a'x - b'y = -c' & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} aa'x + a'by = & a'c \\ -aa'x - ab'y = & -ac', \\ \hline \end{array}$$

кус пäй:

$$(a'b - ab')y = a'c - ac'$$

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Упражненият.

169. Решшиэ подстановка способал уравнениёйн система:

$$\begin{cases} y = 2x - 3; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + y = 3; \\ 3x - 2y = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 6; \\ x + 4y = -15. \end{cases}$$

170. Следующойт системат решшиэ алгебраическойн лизиāннāн способал

$$\begin{cases} 4x + 7y = 5; \\ -2x + 5y = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 20; \\ 2x - 10y = 10. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 8y = 19; \\ 2x - 2y = 10. \end{cases}$$

171. Решшиэ следующойт уравненият миттӯйзел-тахто способал:

$$\begin{cases} (2x - 1)(y + 2) = (x - 2)(2y + 5); \\ 5x - 2 = 2y + 15. \end{cases}$$

172. $\begin{cases} ax + by = c; \\ y = mx. \end{cases} \quad \begin{cases} x + a = my; \\ y + b = nx. \end{cases}$

173. Лōӯдиā a-н и b-н значенният двучленас $y = ax + b$ условиял, что $y = -11$, если $x = -2$ и $y = 1$, если $x = 2$.

174. Он остетту 8 *кг* ӯхтā тавару и 19 *кг* тойста и кайкес он максетту 16 р. 40 к.; тойзел керрал сийт же хиннас он остетту 20 *кг* энзимäйстā таваруа и 16 *кг* тойста и он максетту кайкес 28 р. 40 к. Тийюстуа ёга таваран килограмман хинда.

175. Треста сай мӯōндāх нäхте 65 велосипедуа, обыкновеннойда и моторнойда. Обыкновеннолойс велосипедойс хāн максой 100 рублин, а моторнолойс 400 рублин. Кайкен тāмāн таваран мӯӯвес треста сай 2980 руб. прибылиэ, причём прибыли обыкновеннолойс велосипедойс оли 12 % и моторнолойс 25 %. Äйя-го оли обыкновеннойда и äйя-го моторнойда велосипедуа?

176. Инженера должен сейзаттуа телеграфнойт паччахат кахтен кохтан вäлил. Хāн чётайччи, что если сейзаттуа ӯксин паччахин рандимäйзих пунктих и ёга 50 *м* пиāх нäйен вāлих, то силлой хāнел эй тāӯвӯ 21 пачаста. Если же панна паччахат ёга 55 *м* пиāх, то эй тāӯвӯ вай 1 пачаста. Äйя-го оли кайккиэдах пачаста и мин харвуох хāнел пидāӯ нет сейзаттуа?

177. Кахтел прямоугольнойл треугольникал оллах ўхтен мойзет гипотенузат. Энзимайзен треугольникан ўкси катетта он 4 *м* лўхемби, а тойне 8 *м* питкемби тойзен треугольникан соответствующолой катеттой. Чётайя нämä катетат, если тийетäх, что энзимайзен площади он 34 *кв. м* сууремби тойзен площадиэ.

Колмен уравнениян система колмен тиэдäмäттöмäн ке.

98. Энзимäйзен степенин уравнениян колмен тиэдäмäттöмäн ке нормальной вида. Если энзимäйзен степенин уравнеияс колмен тиэдäмäттöмäн ке x, y и z он луаитту нет же преобразованият, кудамат мўö озутимма уравнениейх нäхте ўхтен и кахтен тиэдäмäттöмäн ке, то мўö приведимма уравнениян мойзех видах (нимитеттäвäх нормальнойкси), кудамас уравнениян хурал пуолел он вай колме членуа: ўкси x-н ке, тойне y-н ке и колмас z-н ке, а ойгиэл пуолел ройх ўкси члена, кус эй оле тиэдäмäтöндä.

Мойне, примиэракси, он уравнения:

$$5x - 3y - 4z = -12.$$

Общой (нормальной) сен вида он тäмäн мойне:

$$ax + by + cz = d,$$

кус a, b, c и d оллах миттўйзет-тахто аннетут относительнойт числат.

99. Ўхтен и кахтен уравнениян колмен тиэдäмäттöмäн ке неопределённости. Олгах, саномма, мейл аннетту кахтен уравнениян система колмен тиэдäмäттöмäн ке:

$$5x - 3y + z = 2; \ 2x + y - z = 6.$$

Назнуачимма ўхтел тиэдäмäттöмäл, примиэракси z, миттўйзен-тахто произвольнойн числан, саномма 1, и панемма тäмäн числан z-н сиях:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 1 = 2, \\ 2x + y - 1 = 6, \end{cases} \text{ с. о. } \begin{cases} 5x - 3y = 1; \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Мўö суамма, тäмäн мугах, кахтен уравнениян системан кахтен тиэдäмäттöмäн ке. Решшихўö сен миттўйзел-тахто способал, лöўвäммä:

$$x = 2, \ y = 3;$$

значит, аннетту система колмен тиэдäмäттöмäн ке удовлетворяйчех значениейл $x = 2$, $y = 3$ и $z = 1$. Аннамма нўгöй тиэдäмäттöмäл z-л миттўйзен-тахто муун значениян, примиэракси $z = 0$, и панемма тäмäн значениян аннеттулойх уравнениейх:

$$5x - 3y = 2; \ 2x + y = 6.$$

Мўö опять суамма кахтен уравнениян системан кахтен тиэдäмäттöмäн ке.

Решшихӱӧ сен миттӱйзел-тахто способал, лӧӱвӑммӑ:

$$x = \frac{20}{11} - 1\frac{9}{11}; y = 2\frac{4}{11}.$$

Значит, аннетту система колмен тиэдӑмӑттӧмӑн ке удовлетворяйчех, если $x = 1\frac{9}{11}$, $y = 2\frac{4}{11}$ и $z = 0$. Назнуаччихуо z-л виэ миттӱйзен-тахто (колманнен) значениян, мӱӧ опять суамма кахтен уравнениян системан кахтен тиэдӑмӑттӧмӑн ке, кудамис суамма x-л и y-л уувет значеният. Сентӑх куй z-л мӱӧ воймма андуа мин-тахто различнолой значенией, то и x-л и y-л воймма суаха мин верран тахто значенией (соответствующолой отетул z-н значениял). Значит, кахтел уравениял колмен тиэдӑмӑттӧмӑн ке он лувутой множества решенией; тойзил санойл, мойне система он **неопределённой**.

Виэ сууремби неопределённости ройх, если он кайккиэдах ӱкси уравнения колмен тиэдӑмӑттӧмӑн ке. Силлой вой миттӱйзил-тахто кахтел тиэдӑмӑттӧмис андуа произвольнойт значеният; колмас же тиэдӑмӑтӧй лӧӱдӱӱ аннетус уравненияс, если панна сих, произвольно отетут значеният кахта тиэдӑмӑтӧндӑ варойн.

100. Колмен уравнениян система колмен тиэдӑмӑттӧмӑн ке. Чтобы войс колмиэ тиэдӑмӑтӧндӑ x, y и z варойн лӧӱдиӑ определённойт численнойт значеният, пидӑӱ, чтобы олис аннетту колмен уравнениян система. Мойне система вой олла решиттӱ подстановка способал, а муга же и уравнениейн алгебраический лизиӑннӑн способал. Озутамма нӑйен способойн применинңӑн тӑмӑн мойзел примиэрал (ёга уравнения энзимӑй он приведитту нормальнойх видах):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7; \\ 7x + 4y - 8z = 3; \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

101. Подстановкан способа. Миттӱйзес-тахто уравненияс, примиэракси, энзимӑйзес, определимма ӱхтен тиэдӑмӑттӧмӑн, примиэракси x-н, тойзен кахтен тиэдӑмӑттӧмӑн каути:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}.$$

Сентӑх куй кайкис уравнениейс x означайччоу ӱхтӑ и самуа числуа, то мӱӧ воймма лӧӱветӱн выражениян панна x-н сиях досталилойх уравнениейх:

$$7 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} + 4y - 8z = 3,$$

$$5 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} - 3y - 4z = -12.$$

Мӱӧ суамма, тӑмӑн мугах, кахтен уравнениян системан кахтен тиэдӑмӑттӧмӑн y и z ке. Тӑмӑн системан решшихӱӧ миттӱйзел-тахто энне озутетул способал, лӧӱвӑммӑ численнойт значениият y и z нахте. Миан примиэрас нет значениият ройтахес: $y=3$, $z=2$; пандуо нама числат выражениях, выведиттух x варойн, лоувамма и сен тиэдамматтоман:

$$x = \frac{7+2\cdot 3-5\cdot 2}{3} = 1.$$

Таман мугах, аннетул системал оллах решениият: $x=1$, $y=3$, $z=2$ (мих нах войби убедиэксех провиэриннал).

102. Алгебраическойн лизианнан способа. Колмес аннетус уравненияс отамма миттуйста-тахто какси, примиэракси, энзимайзен и тойзен, и луадихуо ухтен тиэдамматтоман, примиэракси z иэс коэфициентойн абсолютнойт величинат ухтен суурyйзикси, хавитамма нийс таман тиэдамматтоман алгебраическойн лизианнан авул; таман периа суамма ухтен уравнениян кахтен тиэдамматтоман x и y ке. Сен яльгех отамма какси миттуйста-тахто мууда уравнениюа колмес аннетус, примиэракси энзимайзен и колманнен (или тойзен и колманнен) и сил же способал хавитамма нийс сен же тиэдамматтоман, с. о. z-н; таман периа суамма виэ ухтен уравнениян x-н и y-н ке:

1) $3x-2y+5z=7$ (8-л)	$24x-16y+40z=56$
2) $7x+4y-8z=3$ (5-л)	$35x+20y-40z=15$
	$59x+4y \quad =71$
1) $3x-2y+5z=7$ (4-л)	$12x-8y+20z= \quad 28$
2) $5x-3y-4z=-12$ (5-л)	$25x-15y-20z=-60$
	$37x-23y \quad =-32$

Решимма получитут какси уравнениюа: $x=1$, $y=3$. Панемма нама числат ухтех аннеттулойс колмес уравнениейс, примиэракси энзимайзех:

$$3\cdot 1-2\cdot 3+5z=7;\quad 5z=7-3+6=10;\quad z=2.$$

З а м е ч а н и я. Нийл же кахтел способал муо воймма неллан уравнениян системан неллан тиэдамматтоман ке туува колмен уравнениян системах колмен тиэдамматтоман ке (а таман системан — кахтен уравнениян системах кахтен тиэдамматтоман ке и м. и.). Вообще m уравнениян системан m тиэдамматтоман ке муо воймма туува $m-1$ уравнениях $m-1$ тиэдамматтоман ке (а таман системан $m-2$ уравнениян системах $m-2$ тиэдамматтоман ке и м. и.).

Упражнениият.

178. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x-5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2x+5y-3z-6\frac{1}{4}=0; \\ 5x-6y+2z=12; \\ 5z=42\frac{1}{4}-7x+y. \end{cases}$

180. $\begin{cases}3x-y+z=17;\\5x+3y-2z=10;\\7x+4y-5z=3.\end{cases}$

181. $\begin{cases}\frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9};\\\frac{3y+4}{x+2y}=\frac{8}{7};\\x+y+z=128.\end{cases}$

Эрӑхӑт уравнениӗйн системойн частнойт видат.

103. Случай, конза эй кай тиэдӑмӓттӧмӓт олла ёга аннетус уравненияс, примиэракси:

$$\begin{cases}10x-y+3z=5;\\4v-5x=6;\\2y+3z=6;\\3y+2v=4.\end{cases}$$

Тӓс случайс система решайчех териӓмбӓх, куй обыкновенно, сентӓх куй эрӓхис уравнениӗйс нет или нӓмӓ тиэдӓмӓттӧмӓт ё оллах хӓвитетӳт. Пидӓӳ вай сообразиэ, миттӳйзет тиэдӓмӓттӧмӓт и миттӳйзис уравнениӗйс пидӓӳ хӓвиттиӓ, чтобы куй вай териӓмбӓх войс пиӓстӓ ӳхтех уравнениях ӳхтен тиэдӓмӓттӧмӓн ке. Миӓн примиэрас, хӓвиттӓхӳӧ энзимӓйзес и колманнес уравнениӗйс z-н и тойзес и неллӓннес v-н, суамма какси уравнениюа x-н и y-н ке:

$$\begin{array}{r} 10x-y+3z=5\\ -2y-3z=-6\\ \hline 10x-3y=-1;\end{array}\qquad\begin{array}{r}4v-5x=6\\ -4v-6y=-8\\ \hline -5x-6y=-2.\end{array}$$

Нӓйен уравнениӗйн решшихӳӧ, суамма: $x=0$; $y=\frac{1}{3}$.

Нӳгӧй панемма нӓмӓ числат тойзех и колмандех уравнениӗйх, силлой суамма:

$$v=\frac{3}{2};\ z=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}.$$

104. Случай, конза тиэдӓмӓттӧмӓт оллах вай дробилойна: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ... Олгах аннетту, примиэракси, система:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{7}{6};\\\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{5}{6};\\\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

Кайккиэ простоймби **тӓмӓн системан войби решшиэ** а б у т и э д ӓ м ӓ т т ӧ м и э н **оттамизен каути. Панемма,** что $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=$

$=y'$ и $\frac{1}{z}=z'$. Силлой суамма ненгойзен системан тиэдāмāттö-миэн x', y' и z' ке:

$$\begin{cases} x'+y'-z'=\frac{7}{6}; \\ x'-y'-z'=-\frac{5}{6}; \\ y'-x'-z'=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Тāмāн системан решшихӯö, лöӯвāммā:

$$x'=\frac{1}{2}, \quad y'=1, \quad z'=\frac{1}{3},$$

с. о.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y}=1, \quad \frac{1}{z}=\frac{1}{3}.$$

Тāс лопуллизести лöӯвāммā:

$$x=2; \ y=1, \ z=3.$$

Отамма виэ тойзен примиэран:

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13; \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2}; \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Дробилой $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и м. и. вой каччуо куй произведенией: $3\cdot\frac{1}{x}$, $2\cdot\frac{1}{y}$ и м. и. Сентāх, если панемма, что $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$ и $\frac{1}{z}=z'$, то система ройх тāмāн мойне:

$$3x'+2y'-4z'=-13;$$
$$6x'-3y'-z'=5\frac{1}{2};$$
$$-5x'+7y'+2z'=3\frac{1}{2}.$$

Нāйс уравнениейс лöӯвāммā:

$$x'=2, \ y'=\frac{1}{2}, \quad z'=5;$$

значит:

$$\frac{1}{x}=2, \ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{z}=5,$$

кус пāй

$$x=\frac{1}{2}, \ y=2, \quad z=\frac{1}{5}.$$

105. Случай, конза он полезно кай аннетут уравненият лизāтā ӯхтех. Олгах аннетту система:

$$\begin{cases} x+y=a; \\ y+z=b; \\ x+z=c. \end{cases}$$

Кайккиэн уравнениейн лизäттÿö ÿхтех, суамма:

$$2(x+y+z)=a+b+c;$$

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Пуолендахуо яльгимäйзес уравнанияс ёгахизен аннеттулойс, суамма:

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a;\quad x=\frac{a+b+c}{2}-b;\quad y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

Упражнeнuят.

182. $\begin{cases}3x+5y=74;\\ 7x+2z=65;\\ 2y+z=25.\end{cases}$

183. $\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=1;\\ \dfrac{30}{x}+\dfrac{31}{y}=6.\end{cases}$

184. $\begin{cases}4x-3z+u=10;\\ 5y+z-4u=1;\\ 3y+u=17;\\ x+2y+3u=25.\end{cases}$

185. $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{z}=\dfrac{1}{12};\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{z}=\dfrac{19}{24};\\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{z}.\end{cases}$

186. Куй кайккиэ простоймби решшиэ система:

$$\begin{cases}x+y+z=29\frac{1}{4};\\ x+y-z=18\frac{1}{4};\\ x-y+z=13\frac{3}{4}.\end{cases}$$

187. Колме остаюа остеттих кофейда, суахариэ и чуаюо. Энзимäйне остая 8-с *кг* кофейда 10 *кг* суахариэ и 3 *кг* чуаюо макс й 35 руб., тойне остая 4-с *кг* кофейда, 15 *кг* суахариэ и 5-с *кг* чуаюо максой 40 руб.; а колмас остая расхотуйччи 82 р. 50 к. 12 *кг* кофейн, 20 *кг* суахарин и 10 *кг* чуаюн остамизех. Лöÿдиä кофейн, суахарин и чуаюн килограмман хинда.

188. Он колме сплуава палуа, кудамат состоитах куллас, хобьяс иваскес; нäмä палат содержитах:

1) 5 вуйттиэ кулдуа, 6 вуйттиэ хобьюа, 8 вуйттиэ васкиэ;
2) 3 —„— —„— 5 —„— —„— 7 —„— —„—
3) 7 —„— —„— 13 —„— —„— 18 —„— —„—

Äйин-го килограммойн пидäÿ оттуа ёга палас, чтобы луадиэ сплуава, кудамас олис 79 *кг* кулдуа, 118 *кг* хобьюа и 162 *кг* васкиэ?

Историческойт сведeния т.

Уравненият вaставутах ё сÿвäс древностис египтянойл. А х м е с а н (2000 вуотта энне миäн эруа) кирьютеıус папирусас вастаувутах энзимäйзен степенин уравнениятÿхтен тиэдäмäттöмäн ке, причём тäмä тиэдäмäтöй обознуаччих санал „хау“ — тукку.

Греческойл математикал Д и о ф а н т а л (IV садуа вуотта миäн эруа) мÿö лöÿвäммä суамолой различнолой уравнениейёй, сийт лувус и уравнениейёй монен тиэдäмäттöмäн ке, но хäн эй анна нийен решиннäн общойда способуа.

Н ь ю т о н андау ё эрäхиэ уравнениян систeман решиндäспособой, сийт лувус и подстановка способан.

Уравнениейёйл äйя занимайттихес арабскойт учёнойт, причём уравнениейёй решшиес хÿö пользуйттихес уравнениян молембих пуолих ÿхтен мойзиэн числойн лизäмизен и пуолендамизен правилойл. Энзимäйстä действиkа санотгих „восстановленияксии“, арабойн мугах algebre; тойне — „противоположения“ — almukabalah. Энзимäйзес нäйс санойс (альджебр) и родих названия „алгебра“.

ВИЙЕС ОТДИЭЛА.

КВАДРАТНОЙН ЮУРЕН ОТТАМИНЕ.

1. Юуриэн основнойт свойстват.

106. Юурен определения. Тойзен степенин (или квадратнойкси) юурекси числас a санотах сен мойста числуа, кудаман квадратта он a. Муга, квадратной юури 49-с он 7, а муга же и —9, сентӓх куй $7^2=49$ и $(-7)^2=49$. Колманнен степенин (или кубичнойкси) юурекси числас a санотах сен мойста числуа, кудаман куба он a. Примиэракси, кубичной юури —125 он —5, сентӓх куй $(-5)^3=(-5)(-5)(-5)=-125$.

Вообще *п-н степенин юурекси числас а санотах сен мойста числуа, кудаман п-й степени он а.*

Числуа п, означайччиюа, миттӯйзен степенин юурда эчитӓх, санотах юурен озуттаякси.

Юурда обозначайях знуакал $\sqrt{\ }$ (радикалан знуакка, с. о. юурен знуакка). Сен горизонтальнойн чертан ал кирьютетах се числа, кудамас юурда эчитӓх (юуреналайне числа), а углан ававаюксен пиӓл паннах юурен озуттая. Муга:

кубичной юури 27-с обозначайях... $\sqrt[3]{27}$;

вийеннен степенин юури 32-с обозначайях... $\sqrt[5]{32}$.

Квадратнойн юурен озуттаюа он приймиттӯ эй кирьюттуа вовсе; примиэракси $\sqrt[2]{16}$ сиях кирьютетах $\sqrt{16}$.

Действиюа, кудаман авул эчитӓх юурда, санотах юурен оттамизекси; се он обратной степених ностамизел, сентӓх куй тӓмӓн действиян авул эчитӓх сидӓ, ми он аннетту степених ностаес (именно степенин основаниюа), а аннетту он се, мидӓ эчитӓх степених ностаес (именно иче степениэ). Сентӓх **юурен отаннан правильностин мӯӧ айнос воймма провиэриэ степених ностамизел**. Примиэракси, чтобы провиэриэ равенства $\sqrt[3]{125}=5$, пидӓӯ вай 5 ностуа кубах; юуреналайзен числан суадуо мӯӧ заключайчемма, что числа 5 он действительно **кубичной юури** 125-с

107. Арифметической юури. Юурда санотах *арифметическойкси*, если се отетах положительнойс числас и иче числа он положительной. Примиэракси, арифметической юури 49-с он 7, силлой куй числуа — 7, кудама он тоже квадратной юури 49-с, эй суа сануо арифметическойкси.

Озутамма следующойда какси арифметическойн юурен свойствуа.

а) Пидäккäх лöÿдиä арифметической $\sqrt{49}$. Мойне юури лиэнöÿ 7, сентäх куй $7^2=49$. Азетамма вопросан, эй-го суа лöÿдиä тойста миттÿйстä-тахто положительнойда числуа x, кудама тоже олис $\sqrt{49}$. Предположимма, что мойне числа он олемас. Силлой се должен олла либо пиэнемби 7, либо сууремби 7. Если допустимма, что $x<7$, то силлой и $x^2<49$ (множимойн и множителян пиэнендäхÿö пиэненöÿ и произведения, если сомножителят оллах положительнойт); если же допустимма, что $x>7$, то силлой и $x^2>49$. Значит, ни миттÿйне положительной числа, ни пиэнемби 7, ни сууремби 7, эй вой олла ÿхтен суурус $\sqrt{49}$ ке. Тäх луадух **аннетун степенин арифметической юури миттÿйзес-тахто числас вой олла вай ÿкси.**

Тойзех заключениях мÿö туллузимма, если олизимма паиссут эй вай юурен положительнойх значениях нäх; муга $\sqrt{49}$ он и числан 7 и числан — 7 суурус (сентäх куй и $7^2=49$ и $(-7)^2=49$).

б) Отамма миттÿйстä-тахто какси эй ÿхтен суурутта положительнойда числуа, примиэракси, 49 и 64. Сийт что $49<64$, мÿö воймма заключчиэ, что и $\sqrt{49}<\sqrt{64}$ (если вай знуакал $\sqrt{\ }$ рубиэмма обозначаймах арифметическойда квадратнойда юурда). Действительно: $7<8$. Тäмäн луадух сийт, что $64<125$, мÿö воймма заключчиэ, что и $\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{125}$. Действительно: $\sqrt[3]{64}=4$ и $\sqrt[3]{125}=5$ и $4<5$. Вообще:

Пиэнеммäл положительнойл числал соответствуйччоу и пиэнемби арифметической юури (сен же степенин).

108. Алгебраической юури. Юурда санотах *алгебраическойкси*, если эй триэбуйя, чтобы се олис отетту положительнойс числас и чтобы се иче олис положительной. Тäх луадух, если выражениял $\sqrt[n]{a}$ элленнетäх n-н степенин алгебраическойда юурда, то тäмä знуаччиу, что числа a войби олла и положительной и отрицательной и иче юури вой олла и положительнойна и отрицательнойна.

Озутамма следующойда неллä алгебраическойн юурен свойствуа.

а) Нечётнойн степенин юури положительнойс числас он положительной числа.

Муга, $\sqrt[3]{8}$ должен олла положительнойна числана (се он 2), сентӓх куй отрицательной числа, ностетту степених нечётнойн степенин узуттаян ке, андау отрицательнойн числан.

б) Нечётнойн степеиин юури отрицательиойс числас он отрицательной числа.

Муга, $\sqrt[3]{-8}$ должен олла отрицательнойна числана (се он -2), сентӓх куй положительной числа, ностетту миттӳйзехтахто степених, андау положительнойн, а эй отрицательнойн числан.

в) Чётнойн степеиии юурел положительнойс числас он какси значениюа вастаккайзиэн знуакойи ке и ӳхтенмойзеи абсолютнойн величинан ке.

Муга, $\sqrt{+4}=+2$ и $\sqrt{+4}=-2$, сентӓх куй $(+2)^2=+4$ и $(-2)^2=+4$; точно муга же $\sqrt[4]{+81}=+3$ и $\sqrt[4]{+81}=-3$, сентӓх, что степенит $(+3)^4$ и $(-3)^4$ оллах ӳхтен и саман числан $+81$ сууруот.

Каксинайне юурен значения обозначайях обыкновенно кахтен знуакан панемизел юурен абсолютнойн величинан эдех: муга, кирьютетах:

$$\sqrt{4}=\pm 2;\quad \sqrt{a^2}=\pm a;\quad \sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

г) Чётнойн степенин юури отрицательнойс числас эй вой олла ни миттӳйзен, ни положительиойн, ни отрицательнойн числан суuруона, сентӓх куй и се и тӓмӓ степених ностамизен яльгех чётнойн озуттаян ке андау положительнойн, а эй отрицательнойн числан. Примиэракси, $\sqrt{-9}$ эй оле ни $+3$, ни -3 и ни мин муун числан суурус.

Чётнойн степенин юурда отрицательнойс числас он приймиттӳ сануо *мнимойкси* числакси, досталилой же числой санотах *вещественнолойкси* или *действительнолойкси* числойкси.

Упражненият.

Мин сууруот оллах следующойт выраженият:

189. $\sqrt{100}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{x^2}$.

190. $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt[3]{27})^3$; $(\sqrt[5]{a})^5$; $(\sqrt{1+x})^2$.

191. $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$.

192. $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt[4]{-16}$.

109. Юурен оттамине произведенияс, степенис и дробис

а) Пидäккäх оттуа арифметической квадратной юури произведенияс abc. Если пидäйс произведения ностуа квадраттах, то куй мӳӧ найммӓ (§ 46), войби ностуа квадраттах ёга сомножителян эриже. Сентäх куй юурен оттамине он действия, обратной степених ностамизел, то пидӓӯ вуоттуа, что и юурен оттамиста варойн произведенияс войби сен оттуа ёга сомножителяс эриже, с. о. что:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Чтобы убедиэксех тāмäн равенстван верностих нäх, ностамма сен ойгиэн пуолен квадраттах (теоремуа мӳӧте: чтобы ностуа степених произведения...):

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{c}\right)^2.$$

Но, юурен определениян мугах:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt{b})^2 = b, \quad (\sqrt{c})^2 = c.$$

Следовательно:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\ \sqrt{c})^2 = abc.$$

Если же произведениян $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}$ квадратта он abc суурус, то тāмä знуаччиу, что тāмä произведения он квадратнойн юурен $\sqrt{abc}$ суурус. Тäмäн луадух:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c},$$

сентäх куй

$$\left(\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 \left(\sqrt[3]{c}\right)^3 = abc.$$

Значит, **чтобы оттуа арифметической юури произведенияс, пидӓӯ се оттуа ёга сомножителяс эриже.**

б) Он кебиэ провиэриннан авул убедиэксех, что нäмä равенстват оллах вернойт:

$$\sqrt{a^4} = a^2, \text{ сентäх что } (a^2) = a^4.$$

$$\sqrt[3]{a^{12}} = x^4, \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad (x^4)^3 = x^{12} \text{ и м. и.}$$

Значит, **чтобы оттуа юури степенис, кудаман озуттая ягаудуу юурен озуттаял, пидӓӯ ягуа степенин озуттая юурен озуттаял.**

в) Вернойт оллах и нäмä равенстват:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \quad \text{сентäх что} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16},$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Вообще:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};\quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Значит, **чтобы оттуа юури дробис, пидӓӱ оттуа се числителяс и знаменателяс эриже.**

Мустойтамма, что нӓйс правилойс предполагайчех, что пагина маткуау арифметическолойх юурилойх нӓх.

Примиэрат.

1. $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\sqrt{a^4}\sqrt{b^6}=3a^2b^3$.
2. $\sqrt[3]{125a^6x^9}=\sqrt[3]{125}\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{x^9}=5a^2x^3$.

Замечания. Если эчиттӓвӓ юури он **чётнойн** степенин юури и лиэнӧӱ алгебраической, то лӧӱветӱн результатан эдех пидӓӱ панна каксинайне знуакка $\pm$. Муга:

$$\sqrt{9x^4}=\pm 3x^2.$$

Упражненият.

193. $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 0{,}01\cdot 25}$; $\sqrt{4a^2b^2}$; $\sqrt{9a^2x^2y^4}$.

194. $\sqrt[3]{-27a^3b^3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}$; $\sqrt[5]{abc}$.

195. $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt{x^6}$; $\sqrt{(a+b)^4}$.

196. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt[3]{(m+n)^6}$.

197. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$; $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

198. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$; $\sqrt{0{,}36x^4y^2}$; $\sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}$.

II. Квадратнойн юурен оттамине числойс.

110. Алгу замечаният. а) Пагинан лӱхендӓмизех нӓхте тӓс главас рубиэмма „квадратнойн юурен" сиях саномах просто „юури".

б) Если ностамма квадраттах натуральнойн риӓвӱн числат: 1, 2, 3, 4, 5, ..., то суамма тӓмӓн мойзен таблицан квадраттой:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 ...

Очевидно, он ӱлен ӓйя ӱннӓллизиэ числой, кудамиэ тӓс таблицас эй оле; мойзис числойс, тиэттӓвӓйне, эй суа оттуа ӱннӓллистӓ юурда. Сентӓх, если пидӓӱ оттуа юури миттӱйзес-тахто ӱннӓллизес числас, примиэракси пидӓӱ лӧӱдиӓ $\sqrt{4082}$, то мӱӧ совимма тӓмӓн требованиян эллендиӓ ненга: оттуа ӱннӓллине юури 4082-с, если сен войби, если же сидӑ эй суа, то мейл пидӑӯ лӧӯдиӑ суурин ӯннӓллине числа, кудаман квадратта он 4082-с (мойне числа он 63, сентӓх куй $63^2 = 3969$, а $64^2 = 4096$).

в) Если аннетту числа он пиэнемби 100, то юури сийт лӧӯдӯӯ умножинда таблицуа муӧте.

111 Юурен оттамине ӯннӓллизес числас, пиэнеммӓс 10 000, но сууреммас 100. Пидӓккӓх лӧӯдиӓ $\sqrt{4082}$. Сентӓх куй тӓмӓ числа он пиэнемби 10000, то юури сийт он пиэнемби 100. Тойзел пуолел пӓй, тӓмӓ числа он сууремби 100, значит, юури сийт он сууремби 10 (или он 10). Но ёга числал, кудама он сууремби 10 (или он 10), но пиэнемби 100, он какси цифруа, значит, эчиттӓвӓ юури он сумма:

$$\text{кӯмменет} + \text{единицат};$$

и сентӓх сен квадратта должен олла сумма:

$$(\text{кӯмменет})^2 + 2\,(\text{кӯм.})\cdot(\text{един.}) + (\text{единицат})^2.$$

Тӓмӓ сумма должен олла суурумбана квадраттана числас 4082. Сентӓх куй (кӯмменет)^2 составляйях садой, то кӯммениэн квадраттуа пидӓӯ эччиэ аннетун числан садойс. Садой аннетус числас он 40 (мӯӧ лӧӯвӓммӓ нийен лувун эройттахуо ойгиэл пуолел пӓй запятойл какси цифруа). Но 40-с он мони ӯннӓллистӓ квадраттуа: 36, 25, 16 . . . и тойзиэ. Отамма нийс суурримман, 36, и допустимма, что юурен кӯммениэн квадратта и он именно тӓмӓ суурин квадратта. Силлой кӯммениэн лугу юурес должен олла 6. Провиэримма нӯгӧй, что тӓмӓ айнос пидӓӯ олла муга, с. о. айнос **юурен кӯммениэн лугу он суурин ӯннӓллине юури юуреналайзен числан садойн лувус.** Тотта, миӓн примиэрас юурен кӯммениэн лугу эй вой олла сууремби 6, сентӓх куй (7 кӯм.)$^2 = 49$ садуа, ми он сууремби 4082. Но се эй вой олла и пиэнемби 6, сентӓх куй 5 кӯм. (единицойн ке) он пиэнемби 6 кӯм., а (6 кӯм.)$^2 = 36$ садуа, ми он пиэнемби 4082. А сентӓх куй мӯӧ эчиммӓ кайкис суурумбуа ӯннӓллистӓ юурда, то мейл эй пиэ оттуа юурда варойн 5 кӯм, конза и 6 кӯм. эй оле ӓйя. И муга, мӯӧ лӧӯвиммӓ юурен кӯммениэн лувун, именно 6. Кирьютамма тӓмӓн цифран ойгиэл пуолел = знуакас, муйстаен, что се означайччоу юурен кӯммениэ. Ностахуо сен квадраттах, суамма 36 садуа. Пуоленнамма нӓмӓ 36 садуа юуреналайзен числан 40-с суас и остатках кирьютамма числан 82.

$$\begin{array}{l} \sqrt{40'82} = 6 \\ \underline{36} \\ 48'2 \end{array}$$

Числас 482 пидӓӯ олла сумма:

$$2\cdot(\mathbf{6\ кӯм.})\cdot(\mathbf{един.}) + (\mathbf{един.})^2.$$

Произведения (6 кӱм.)·(един.) должен составляйя кӱмменет. Сентӓх кӱммениэн и единицойн каксинкердӓйста произведениюа пидӓӱ эччиэ остаткан кӱмменис, с. о. 48-с (мӱӧ суамма нийен лувун, эройттахуо остаткас 48'2 ӱхтен цифран ойгиэл пуолел пӓй). Юурен каксинкердӓйзет кӱмменет состуавитах 12. Значит, если 12 умножимма юурен единицойл (кудамат пока оллах тиэдӓмӓттӧмӓт), то мӱӧ должны суаха числа, кудама он 48-с. Сентӓх мӱӧ 48 юамма 12. Сих нӓхте, остаткан хурал пуолел веяммӓ вертикальнойн чертан и сен туакси (чертас сийрдӱхӱӧ ӱхтен сиян верран хурах пуолех, микси, причинан тервӓх тийюстамма), кирьютамма каксинкердӓйзен юурен энзимӓйзен числан, с. о. 12, и юамма сил 48.

Частнойх суамма 4. Но, эннепӓй эй суа ручайяксех, что цифран 4 вой оттуа юурен единицакси, сентӓх кӱй мӱӧ васта явоймма 12 остаткан кайкен кӱммениэн лувун, силлой куй нийен эрӓс чуасти вой и эй олла кӱммениэн и единицойн каксинкердӓйзес квадратас, а он единицойн квадратан состуавас. Сентӓх цифра 4 вой олла суури. Сидӓ пидӓӱ испытайя. Се, очевидно, рубиэу пӓдемӓх сийт случайс, если сумма $2\cdot(6\text{ кӱм.})\cdot 4+4$ эй родей сууремби остаткуа 482. Тӓмӓн сумман мӱӧ воймма чётайя керрал тӓмӓн мойзел простойл приёмал: вертикальнойн чертан туакси юурен каксинкердӓйзен цифран (12) ойгиэл пуолел кирьютамма цифран 4 (сентӓх-то мӱӧ и сийрӱммӓ чертас ӱхтел сиял) и сил же и умножимма суавун числан (124 4-л):

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{40'82}=6 \\ & 36 \\ \hline 124 & 48'2 \\ 4 & 496 \end{array}$$

Действительно, тӓдӓ умножиндуа луадиес, мӱӧ 4 умножимма 4-л, значит, лӧӱвӓммӓ юурен единицойн квадратан; сен яльгех мӱӧ умножимма 12 кӱммендӓ 4-л, значит лӧӱвӓммӓ юурен кӱммениэн каксинкердӓйзен произведениян единицойл. Результатас суамма керрал сен и тӓмӓн сумман. Суаду произведения лиэни 496, ми он сууремби остаткуа 482; значит, цифра 4 он суури. Силлой муга же испытайчемма мӱӧдӓхистӓ пиэнембиӓ цифруа, 3. Сих нӓхте пӱхкиммӓ цифран 4 и произведениян 496 и цифран 4 сиях панемма 3 и 123 умножимма 3-л:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{40'82}=63 \\ & 36 \\ \hline 123 & 48'2 \\ 3 & 369 \\ \hline & 113 \end{array}$$

Произведения 369 родих пиэнемби остаткуа 482; значит, цифра 3 пӓдӧӱ (если и тӓмӓ цифра лиэнис суури, силлой пидайс испытайя мўо̆дӑхистӑ пиэнембиӑ цифруа, 2). Кирьютамма цифран 3 юурех ойгиэл пуолел кўммениэн цифрас. Яльгимӓйне остатка 113 озуттау аннетун числан избыткуа сууримман ўннӓллизен квадратан пиӓл. Провиэриндах нӓхте ностамма квадраттах числан 63 и результаттах лизиӓммӑ 113:

$$\begin{array}{r} 63^2 = 3969 \\ +\ \underline{\ \ 113} \\ 4082 \end{array}$$

Сентӑх куй суммах родих аннетту числа 4082, то действия он луаитту верно.

Примиэрат:

$$1.\ \begin{array}{r|l} & \sqrt{12'25}=35 \\ & 9 \\ 65 & \overline{32'5} \\ 5 & \underline{32\,5} \\ & 0 \end{array} \qquad 2.\ \begin{array}{r|l} & \sqrt{86'55}=93 \\ & 81 \\ 183 & \overline{55'5} \\ 3 & \underline{54\,9} \\ & 6 \end{array} \qquad 3.\ \begin{array}{r|l} & \sqrt{16'05}=40 \\ & 16 \\ 8 & \overline{0'5} \end{array}$$

$$4.\ \begin{array}{r|l} & \sqrt{8'72}=29 \\ & 4 \\ 49 & \overline{47'2} \\ 9 & \underline{44\,1} \\ & 31 \end{array} \qquad 5.\ \begin{array}{l} \sqrt{64'00}=80 \\ \underline{64} \\ 00 \end{array}$$

Неллӓннес примиэрас остаткуа 47 кўммендӓ ягаес 4-л мўо̆ суамма частнойх 11. Но сентӑх куй юурен единицойн цифра эй вой олла каксизнуаккахизена числана 11 или 10, то пидӑў керрал испытайя цифруа 9.

Вийеннес примиэрас 8 квадратан пуолендамизен яльгех энзимӓйзес гранис остатка ройхес 0 суурус, и мўо̆дӑхизес гранис тоже оллах нолят. Тӑмӑ озуттау, что эчиттӓвӓс юурес он вай 8 кўммендӓ, и сентӓх единицойн сиях пидӑў панна ноля.

112. Юурен оттамине ўннӓллизес числас, сууреммас 10000. Пидӓккӓх ло̆ўдиӑ $\sqrt{35782}$. Сентӑх куй юуреналайне числа он сууремби 10000, то юури сийт он сууремби $\sqrt{10000}=100$, и следовательно, сийт он 3 либо энӓмби цифруа. Олгах сийт ми-тахто цифруа, мўо̆ сен воймма каччуо айнос вай кўмменизн и единицойн суммана. Если, примиэракси, юури лиэно̆ў 482, то мўо̆ воймма сен чётайя 48-н кўммене $+$ 2 единицан суммана. Силлой юурен квадратта эндизен луадух лиэно̆ў колмен лизӓттӓвӑн суммана:

$$(\text{кўмменет})^2 + 2\cdot(\text{кўм.})\cdot(\text{един.}) + (\text{един.})^2.$$

Нўго̆й мўо̆ воймма рассуждайя юури муга же куй и $\sqrt{4082}$ эччиес (предыдущойс параграфас). Эро ройх вай се, что юурен кӱммениэн эччимистӓ варойн 4082-с мейл пиди оттуа юури 40-с и сен олис войнут луадиэ умножинда таблицан мугах; нӱгӧй же $\sqrt{357'82}$ кӱммениэн суамиста варойн мейл пидӓӱ оттуа юури 357-с, мидӓ умножинда таблицан мугах луадиэ эй суа. Но мӱӧ воймма лӧӱдиӓ $\sqrt{357}$ сил приёмал, кудама оли объяснитту предыдущойс параграфас, сентӓх куй числа $357 < 10000$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{\overline{3'57'8\,2}} = 189 \\
 & 1 \\
\hline
28 & 25'7 \\
8 & 22\,4 \\
\hline
369 & 3\,3\,8'2 \\
9 & 3\,3\,2\,1 \\
\hline
 & \quad\quad 6\,1
\end{array}
$$

Суурин ӱннӓллине юури 357-с он 18. Значит, $\sqrt{3'57'82}$ должен олла 18 кӱммендӓ.

Чтобы лӧӱдиӓ единицат, пидӓӱ 3'57'82-с пуолендуа 18 кӱмменен квадратта, мидӓ варойн пидӓӱ вай пуолендуа 18 квадратта 357 садас и остаткан риннал сийрдиӓ какси яльгимӓйстӓ юуреналайзен числан цифруа. Остатка, получитту 18 квадратан пуолендахуо 357-с мейл ё он: се он 33. Значит, остаткан суамизех нӓхте, кудама ройх 18 кӱммeнен квадратан пуолендамизес 3'57'82-с пидӓӱ вай 33 ойгиэл пуолел кирьюттуа цифрат 82.

Иэллех луаимма муга, куй луаимма $\sqrt{4082}$ эччиес, именно: остаткан 3382 хурал пуолел веяммӓ вертикальнойн чертан и сен туакси кирьютамма (сийрдӱен чертас ӱхтел сиял) лӧӱветтӱлӧйн юурен кӱммениэн каксинкердайзен числан, с. о, 36 (какси кердуа 18). Остаткас эройтамма ӱхтен цифран ойгиэл пуолел пӓй и юамма остаткан кӱммениэн лувун, с. о. 338 юамма 36-л. Частнойх суамма 9. Тӓмӓн цифран испытайчемма, мидӓ варойн кирьютамма сен 36-н ойгиэл пуолел и умножимма сил же. Произведения лиэни 3321, ми он пиэнемби остаткуа. Значит, цифра 9 пӓдӧӱ, кирьютамма сен юурех.

Вообще, чтобы оттуа квадратной юури мнттӱйзес-тахто ӱннӓллизес чнслас, пндӓӱ оттуа юурн сен садойн чнслас; еслн тӓмӓ чнсла он сууремби 100, то пндӓӱ эччнэ юурн нӓйен садойн садойн чнслас, с. о., тӓмӓн чнслан кӱммeннс туханзнс; еслн н тӓмӓ чнсла он сууремби 100, пндӓӱ оттуа юури садойн кӱммeннэн туханзнэн чнслас, с. о. аннетун чнслан мнллионойс, н м. н.

Примиэрат.

```
1. √8'72'00'00 = 2952
    4
49 | 47'2
 9 | 44'1
585  | 3 10'0
  5  | 2 92 5
5902 | 1750'0
   2 | 1180 4
        569 6
```

```
2. √3'50'32'60'89 = 18717
    1
  28 | 25'0
   8 | 224
 367 | 263'0
   7 | 2569
3741 |  636'0
   1 |  3741
37427 | 26198'9
    7 | 261989
             0
```

```
3. √9'51'10'56 = 3084
    9
 608 | 511'0
   8 | 4864
6164 | 2465'6
   4 | 24656
         0
```

Яльгимäйзес примиэрас, энзимäйзен цифран лŏўдăхўŏ и сен квадратан пуолендахуо, остатках суамма 0. Сийрăммă алах следующойт 2 цифруа 51. Кўммениэн эройттахуо, мўŏ суамма 5 кўм., силлой куй лŏўветтў юурен каксинкердайне цифра он 6. Значит, 5 ягаес 6-л мўŏ суамма 0. Панемма юурех тойзел сиял 0 и остатках сийрăммă алах следующойт 2 цифруа; суамма 5110. Иэллех яткамма куй и обыкновенно.

```
4. √81'00'00 = 900
    81
     0
```

Тăс примиэрас эчиттăвăс юурес он вай 9 садуа, и сентăх кўммениэн и единицойн сиях пидăў панна нолят.

Правила. **Чтобы оттуа квадратной юурн аннетус ўннăллнзес числас, юатах се, заводнен ойгнэс кăес хурах кăдех пăй, гранилойх каксин цнфройн ёгахнзех, пайчн энзнмăйстă (раннимммайста хуран пуолнмайста), кудамас вой олла н ўксн цнфра.**

Чтобы лŏўднă юурен энзнмăйне цнфра, отетах квадратной юурн энзнмăйзес граннс.

Чтобы лŏўднă тойне цнфра, энзнмăйзес граннс пуоленнетах юурен энзнмăйзен цнфран квадратта, алах остатках снйретăх тойне гранн н суавун чнслан кўмменнэн лугу юатах юурен энзнмăйзел каксннкердайзел цнфрал; суаду ўннăллнне чнсла нспытайях.

Тăмă нспытання луаитах ненга: вертнкальнойн чертан туакси (хурал пуолел остаткас) кирьютетах энне лŏўветтў юрен каксинкер-

дайне числа и сеи ойгиэл пуолел кирьютетах испытайдава цифра; тäмäн кирьютуксеи яльгех суаду числа умножитах испытайдавал цифрал. Если умиожеиияи яльгех тулоу числа, сууремби остаткуа, то испытайдава числа эй пäй, и пидäÿ испытайя мÿöдäхистä пиэнембиä цифруа.

Тойзет юурен цифрат лöÿветäх сеи же приёман мугах.

Если граиин алах сийрдäмизеи яльгех суавуи числаи кÿмменизэи лугу ройхес пиэиемби ягаюа, с. о. пиэиемби каксинкердайстa юуреи лöÿветтÿö чуастиэ, то юурех паиных 0, сийретäх алах мÿöдäхине граии и яткетах действиюа иэллех.

113. **Юурен цифройн лугу.** Юурен эччимис процессан качондас следуйччоу, что **юурес пидäÿ олла сен верда цифрой, мин верда он юуреналайзес числас гранилой каксин цифройн ёгахизес** (хуран пуэлизес гранис вой олла и ÿкси цифра); тойзил санойл: **если юуреналайзес числас он чётной лугу цифрой, то юурес ройх цифрой кахта кердуа вäхемби тäдä лугуо; если же юуреналайзес числас он нечётной лугу цифрой, то юурес ройх цифрой кахта кердуа вäхемби тäдä нечётнойда лугуо, сууреннеттуо единицал.**

Упражнениям.

Оттуа квадратной юури следуюшолойс числойс:

199. $\sqrt{289}$; $\sqrt{4225}$; $\sqrt{61009}$; $\sqrt{582169}$.
200. $\sqrt{135424}$; $\sqrt{956484}$; $\sqrt{57198969}$.
201. $\sqrt{68492176}$; $\sqrt{422220304}$. **202.** $\sqrt{285970396644}$.

203. Об'ясниэ, минтäх ёга ÿннäллине числа, лоппения миттÿйзел-тахто неллäс цифрас: 2, 3, 7 и 8, эй вой олла точнойна квадраттана.

III. Приближённолойн квадратнолойн юуриэн оттамине.

114. **Какси случайда, конза эй суа оттуа точнойда юурда.** Точнойкси квадратнойкси юурекси аннетус ÿннäллизес или дробнойс числас санотах мойста числуа, кудаман квадратта он точно аннетун числан суурус. Озутамма признакат, кудамиэ мÿöте тойчи войби суудиэ, что аннетус числас точнойда юурда эй суа оттуа.

а) Если аннетус ÿннäллизес числас эй лäхте точной ÿннäллине юури (юурда оттаес ройх остатка), то мойзес числас эй суа лöÿдиä и дробнойда точнойда юурда, сентäх куй эй ÿннäлсуа лöÿдиä и дробнойда точнойда юурда, сентäх куй эй ÿннäллизен числан суурус ёга дроби, умножитту ичеллäх, андау произведенияс тоже дробин, а эй ÿннäллизен числан.

б) Сентäх куй юури дробис он ÿхтен суурус куй юури числителяс, юатту юурел знаменателяс, то точнойда юурда сократтиматтомас дробис эй суа лöÿдиä сийт случайс, если юурда эй суа оттуа числителяс и знаменателяс. Примиэракси, дробилойс

$\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ и $\frac{11}{51}$ эй суа оттуа точнойда юурда, сентāх куй энзимāй-зес примиэрас сидä эй суа оттуа знаменателяс, тойзес числителяс и колманнес — ни числителяс, ни знаменателяс.

Мойзис числойс, кудамис эй лāхте точной юури, вой оттуа вай приближённойт юурет, кудамих нāх мўō нўгōй рубиэмма пагиземах.

115. Приближенной юури точностин ке 1 суате. Приближённойкси квадратнойкси юурекси аннетус числас точностин ке 1 суате (ўннäллизес либо дробнойс — ўксикай) санотах мойста числуа, кудама удовлетворяйччоу кахтел следующойл требованиял: 1) тäмäн числан квадратта он пиэнемби аннеттуо числуа (или он сен суурус), но 2) сен числан, сууреннетун единицал, квадратта он сууремби аннеттуо числуа. Тойзил санойл, *приближённойкси квадратнойкси юурекси точностин ке 1 суате санотах сууримбуа ўннäллистä квадратнойда юурда, кудаман квадратта эй оле сууремби аннеттуо числуа*, с. о. се юури, кудаман мўō лōўвиммä иэллизес главас. Тäдä юурда санотах приближённойкси точностин ке 1 суате, сентāх что точнойн юурен суамизех нäхте тāх приближённойх юурех пидäйс лизäтä виэ эрäс 1-тä пиэнемби числа, муга что если тиэдäмäттōмäн точнойн юурен сиях мўō отамма тäмäн приближённойн, то луаимма ошибкан, пиэнеммäн 1.

Пидäккäх, саномма, лōўдиä приближённой квадратной юури 395,74-с точностин ке 1 суате. Силлой обращайматта вниманиюа дробих отамма юурен вай ўннäллизес числас.

$$\sqrt{3'95} = 19$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 29 & 29'5 \\ 9 & 26\,1 \\ \hline & \ \ 34 \end{array}$$

Суаду юури 19 лиэнōў эчиттäвä, сентāх куй

$$19^2 < 395{,}74, \text{ а } 20^2 > 395{,}74.$$

Правила. **Чтобы оттуа прилижённой квадратной юури точностин ке 1 суате, пидäў оттуа суурин ўннäллине юури аннетун числан ўннäллизес чуастис.**

Тäмäн правилан мугах лōўветтў числа он приближённой юури недостаткан ке, сентäх куй сийт эй тäўвў точнойх юурех суате эрäстä дробиэ (пиэнембиä 1). Если тäмäн юурен сууреннамма 1-л, то суамма тойзен числан, кудамас он избытка точнойн юурен пиäл, и тäмä избытка он пиэнемби 1. Тäдä 1-л сууреннеттуо юурда войби тоже нимиттиä приближённойкси юурекси, но избыткан ке.

116. Приближённой юури точностин ке $\frac{1}{10}$ суате. Пидäккāх лŏўдиă $\sqrt{2,35104}$ точностин ке $\frac{1}{10}$ суате (недостаткан ке). Тăмă знуаччиу, что пидăў лŏўдиă мойне десятичной дроби, кудама состоис ўннăллизис единицойс и кўмменензис долис и кудама удовлетворяйччис кахтел следующойл требованиял: 1) тăмăн дробин квадратта ей оле сууремби 2,35104, но 2) если сууреннамма сен $\frac{1}{10}$, то тăмăн сууреннетун дробин квадратта он сууремби 2,35104.

$$\sqrt{2',35'10'4}=1,5$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 25 & 13'5 \\ 5 & 1\,25 \\ \hline & \;\;1\,0. \end{array}$$

Чтобы лŏўдиă тăмăн мойне дроби, мўŏ лŏўвăммă энзимăй приближённойн юурен точностин ке 1 суате с. о. отамма юурен вай ўннăллизес числас 2. Суамма 1 (и остатках 1). Кирьютамма юурех цифран 1 и панемма сен яльгех запятойн. Нўгŏй рубиэмма эччимăх кўмменензиэн цифруа. Сих нăхте кирьютамма остаткан 1 риннал цифрат 35, сейзоят ойгиэл пуолел запятойс и яткамма юурен оттамиста муга, куй отимма юурда ўннăллизес числас 235. Суавун цифран 5 кирьютамма юурех кўмменензиэн сиях. Досталилой юуреналайзен числан (104) цифрой мейл эй пиэ. Что суаду числа 1,5 ройх действительно приближённой юури точностин ке $\frac{1}{10}$ суате, нăгўў следующойс: если мўŏ эччинўзиммă сууримбуа ўннăллистă юурда 235-с точностин ке 1-х суате, то суаннузимма 15, значит:

$$15^2 \leqslant 235, \text{ но } 16^2 > 235.$$

Кайккиэн нăйен числойн ягахуо 100-л, суамма:

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2,35; \quad \frac{16^2}{100} > 2,35.$$

с. о.

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leqslant 2,35; \quad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2,35.$$

или

$$1,5^2 \leqslant 2,35; \quad 1,6^2 > 2,35.$$

Следовательно,

$$1,5^2 < 2,35104; \quad 1,6^2 > 2,35104$$ [1].

---

1) Числан 0,00104 лизиăннăс каксинайне знуакка $\leqslant$ должен муттуо, очевидно, знуакакси $<$, а знуакка $>$ йиăў (сентăх куй $0,00104 < 0,01$).

Значит, числа 1,5 он се десятичной дроби, кудаман мӹб нимитӓммӓ приближённойкси юурекси точностин ке $\frac{1}{10}$ суате.

Лӧӱвӓммӓ тӓл приёмал виэ следующойт приближённойт юурет точностин ке 0,1 суате:

$$\sqrt{57{,}40}=7{,}5 \qquad \sqrt{0{,}30}=0{,}5 \qquad \sqrt{0{,}03'8}=0{,}1$$

$$\begin{array}{r|l} & 49 \\ 145 & 84'0 \\ 5 & 725 \\ & 115 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \hline 28 \end{array}$$

117. Приближённой юури точностин ке $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и м. и. суате.

Пидӓккӓх лӧӱдиӓ точностин ке $\frac{1}{100}$ суате приближённой $\sqrt{248}$ недостаткан ке. Тӓмӓ знуаччиу: лӧӱдиӓ мойне десятичной дроби, кудама состоис ӱннӓллизис, кӱмменензис и садaнзис долис и кудама удовлетворяйччис кахтел требованиял: 1) сен квадратта эй оле сууремби 248, но 2) если тӓмӓн дробин сууреннамма $\frac{1}{100}$-л, то тӓмӓн сууреннетун дробин квадратта он сууремби 248. Мойзен дробин мӱӧ лӧӱвӓммӓ тӓмӓн мойзес последовательностис: энзимӓй лӧӱвӓммӓ ӱннӓллизен числан, сен яльгех кӱмменензиэн цифран, сен яльгех и садaнзиэн цифран. Юури ӱннӓллизес числас ройх 15 ӱннӓллистӓ. Чтобы суаха кӱмменензиэн цифра, пидӓӱ, куй мӱӧ наймма энне, кирьюттуа остатках 23 виэ 2 цифруа, сейзоюа запятойн ойгиэл пуолел:

$$\sqrt{2'48',00'00}=15{,}74$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 25 & 14'8 \\ 5 & 125 \\ 307 & 230'0 \\ 7 & 2149 \\ 3144 & 1510'0 \\ 4 & 12576 \\ & 2524 \end{array}$$

Миӓн примиэрас нийдӓ цифрой эй оле вовсе; панемма нийен сиях нолят. Нийен кирьюттахуо остатках и яткаен действиюа муга, будто куй мӱб эччизиммӓ юурда ӱннӓллизес числас 24800, мӱб лӧӱвӓммӓ кӱмменензиэн цифран 7. Йиӓӱ лӧӱдиӓ садaнзиэн цифра. Сих нӓхте кирьютамма остатках 151 виэ 2 нолюа и яткамма юурен оттамиста, будто куй мӱӧ эччизиммä юурда ӱнӓллизес числас 2480000. Суамма, 15,74. Что тäмä числа действительно он приближённой юури 248-с точностин ке $\frac{1}{100}$ суате недостаткан ке, нäгӱӱ следующойс. Если мӱӧ эччизиммä ӱнäллистä квадратнойда юурда ӱннäллизес числас 2480000, то суазимма 1574; значит:

$$1574^2 \leqslant 2480000, \text{ но } 1575^2 > 2480000.$$

Кайккиэн числойн ягахуо 10000-л ($= 100^2$), суамма:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000; \ \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

с. о.

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leqslant 248{,}0000; \ \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248{,}0000.$$

или

$$15{,}74^2 \leqslant 248; \quad 15{,}75^2 > 248 .$$

Значит, 15,74 он се десятичной дроби, кудамуа мӱӧ саномма приближённойкси юурекси 248-с недостаткан ке точностил $\frac{1}{100}$ суате.

Тäдä приёмуа применяйен юуриэн эччимизес точностин ке $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ и м. и. суате, лöӱвäммä следующойн:

Правила. **Чтобы оттуа аннетус ӱииäллизес числас или аииетус десятичиойс дробис приближёииой юури точиостии ке $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и м. и. суате, лöӱветäх эизимäй приближёииой юури недостаткаи ке точиостил 1 суате, оттаеи юуреи ӱинäллизес числас (если сидä эй оле, кирьютетах юурех 0 ӱииäллистä).**

Сен яльгех лöӱветäх кӱмменеизиэи цифра. Сих иäхте остатках кирьютетах какси юуреиалайзеи числан цифруа, сейзоюа запятойн ойгиэл пуолел (если иийдä эй оле, остатках кирьютетах какси нолюа) и яткетах юуреи отаидуа муга, куй се луаитах юурда оттаес ӱииäллизес числас. Суаду числа кирьютетах кӱммеиеизиэи сиях.

Сеи яльгех лöӱветäх садаизиэн цифра. Сих нäхте остатках кирьютетах опять какси цифруа, сейзоюа иийеи цифройи ойгиэл пуолел, кудамат олдих васта вай сийретӱт, и м. и.

Тäх луадух, юурда оттаес ӱннäллизес числас десятичнойн дробин ке пидäӱ **ягуа граиилойх каксии цифройи ёга гранис, заводиен запятойс, куй хурах пуолех (числаи ӱииäллизес чуастис), муга и ойгиэх пуолех (дробнойс чуастис.)**

Примиэрат.

1. Лӧӱдиӣ точностин ке $\frac{1}{100}$ суате юурет: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{0{,}3}$.

а) $\sqrt{2} = 1{,}41$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 24 & 10'0 \\ 4 & 9\;6 \\ \hline 281 & 40'0 \\ 1 & 28\;1 \\ \hline & 11\;9 \end{array}$$

б) $\sqrt{0{,}30} = 0{,}54$

$$\begin{array}{r|l} & 25 \\ 104 & 50'0 \\ 4 & 41\;6 \\ \hline & 8\;4 \end{array}$$

2. Оттуа юурет $\frac{1}{10000}$ суате; а) $\sqrt{0{,}38472}$; б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

а) $\sqrt{0{,}38'47'20} = 0{,}6202$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ 122 & 24'7 \\ 2 & 24\;4 \\ \hline 12402 & 3200'0 \\ 2 & 2480\;4 \\ \hline & 719\;6 \end{array}$$

б) $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0'42'85'71'42}$

$\sqrt{0{,}42'85'71'42} = 0{,}6546$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ 125 & 68'5 \\ 5 & 62\;5 \\ \hline 1304 & 607'1 \\ 4 & 521\;6 \\ \hline 13086 & 8554'2 \\ 6 & 7851\;6 \\ \hline & 702\;6 \end{array}$$

Яльгимӓйзес примиэрас мӱӧ муутимма дробин $\frac{3}{7}$ десятичнойкси, чӗтайен 8 десятичнойда знуаккуа, чтобы лиэнис 4 граниэ, кудамат пидӓӱ юурен 4-н десятичнойн знуакан эчиндӓх нӓхте.

Замечания. Оллах особойт таблицат, кудамих оллах кирьютетут квадратнойт юурет (отетут тиэтӱн точностин ке) ӱлен ӑйис числойс. Мойзил таблицойл пользуйченда способат обыкновенно озутетах предисловиёйс нӑйх таблицойх.

118. Юурен оттамине обыкновеннолойс дробилойс. Точнойн квадратнойн юурен сократтиматтомас дробис войби оттуа ва силлой, конза молеммат дробин членат оллах точнойт квадратат (§ 114). Тӓс случайс пидӓӱ вай оттуа юури числителяс и знаменателяс эриже, примиэракси:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Приближённой юури обыкновеннойс дробис миттӱйзел-тахто десятичнойл точностил он кайккиэ простоймби эччиэ, если энзимӓй обыкновеннойн дробин мууттахуо десятичнойкси, лугиэ тӑс дробис запятойн яльгех мойне лугу десятичнолой знуаккой, ми олис кахта кердуа сууремби десятичнолойн знуакойн лугуо эчиттäвäс юурес. Пидäккäх, примиэракси, лöÿдиä $\sqrt{2\frac{3}{7}}$ точностин ке 0,01 суате, с. о. кахтен десятичнойн знуакан ке запятойн яльгех. Сих нäхте муутамма $2\frac{3}{7}$ десятичнойкси дробикси 4-н десятичнойн знуакан ке: $2\frac{3}{7} = 2{,}4285\ldots$ и отамма приближённойн юурен 2,4285-с точностин ке 0,01 суате:

$$\sqrt{2{,}4285} = 1{,}55$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 25 & 14'2 \\ 5 & 12\,5 \\ \hline 305 & 178'5 \\ 5 & 152\,5 \\ \hline & 26\,0 \end{array}$$

Но войби луадиэ и тойзин. Объяснимма сен следующойл примиэрал:

Лöÿдиä приближённой $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Луаимма знаменателян точнойкси квадратакси. Сих нäхте пидäйс вай умножиэ дробин молеммат членат 24-л; но тäс примиэрас войби луадиэ тойзин. Разложимма 24 простолойх множителёйх: $24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$. Тäс разложенияс нäгÿÿ, что если 24 умножиэ 2-л и виэ 3-л, то силлой произведенияс ёга простой множителя рубиэу повторяймахес чётнойн числан кердуа, и следовательно, знаменателя ройх квадратакси:

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2\cdot 3}{2^4\cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2\cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Йиäÿ чётайя $\sqrt{30}$ миттÿйзен-тахто точностин ке и результатта ягуа 12. Тäмäн айгах пидäÿ тиэдиä, что юаннас 12 пиэненöÿ и дроби, кудама озуттаÿ точностин степенин. Муга, если лöÿвäммä $\sqrt{30}$ точностнн ке $\frac{1}{10}$ суате и результатан юамма 12, то суамма приближённойн юурен дробис $\frac{5}{24}$ точностин ке $\frac{1}{120}$ суате (а именно $\frac{54}{120}$ и $\frac{55}{120}$).

Упражненият.

204. $\sqrt{13}$ 1 суате; $\sqrt{13}$ 0,1 суате; $\sqrt{13}$ 0,001 суате.

205 $\sqrt{101}$ $\frac{1}{100}$ суате; $\sqrt{0{,}8}$ 0,01 суате.

206. $\sqrt{0{,}0081}$ $\frac{1}{100}$ суате; $\sqrt{19{,}0969}$ $\frac{1}{100}$ суате.

207. $\sqrt{356}$ 1 суате, сен яльгех 0,1 суате, иэллех 0,01 суате.

208. Чётайя 0,01 суате квадратной юури слeдующолойс дробилойс, мууттаен ёгахивен нийс десятичнойкси дробикси досгаточнойн лувун ке десятичнолой знуаккой:

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \frac{5}{12}, \frac{7}{250}.$$

209. Чётайя квадратной юури нийс же дробилойс, мууттаматта десятичнолойкси, а луадиен знаменателян точнойкси квадратакси.

210. Чётайя юурет:

$$\sqrt{0,3}, \qquad \sqrt{5,7} \quad \left(\frac{1}{10} \text{ суате}\right);$$

$$\sqrt{2,313} \qquad \sqrt{0,00264} \left(\frac{1}{100} \text{ суате}\right).$$

Историческойт сведeният.

Знуакан $\sqrt{}$ юурен отанда действиян обознуаччимизех нӓхте математикках отти Рудольф 1525 в. Энне просто кирьютеттих ӱнӓллине сана „юури“ (латинакси — radix), кудама яллес оли сократитту ӱхтех энзимӓйзех буквах суате, а тӓмӓ яльгимӓйне вӓхӓйзин и сай видан $\sqrt{}$.

КУУВЕС ОТДИЭЛА.

Квадратной уравнения.

119. Задуачча. Моторной венех энзимäй хейттӯй ёгиэ мӯõте виррал мӯõдäх 28 *км* и керрас же киäндӯй яриллех; тäх сил мäни 7 чуассуо. Лöӯдиä венехен маткуаннан скорости сейзояс веес, если он тиэтойс, что вези ёвес вирдуау скоростин ке 3 *км* чуасус.

Анна венехен маткуаннан скорости сейзояс веес ройх x *км* чуасус; силлой ёвен виррал мӯõдäх се маткай скоростин ке $(x+3)$ *км* чуасус, а виррал вастах скоростин ке $(x-3)$ *км* чуасус. Следовательно, 28 *км* венех маткай $\frac{28}{x+3}$ чуасус, конза лийккуй виррал мӯõдäх и $\frac{28}{x-3}$ чуасус, конза венех маткай ярилл ех.

Задуачан условиюа мӯõте мӯõ суамма уравнениян:

$$\frac{28}{x+3}+\frac{28}{x-3}=7.$$

Дробилойн пиäстäхӯõ знаменателёйс, суамма;

$$28\,(x-3)+28\,(x+3)=7\,(x+3)\,(x-3),$$

с. о.

$$28\,x-84+28x+84=7\,(x^2-9),$$

или

$$56\,x=7x^2-63.$$

Мӯõ саймма уравнениян, кудамас он члена тойзен степенин тиэдäмäттõмäн ке, но эй оле членой, кудамис тиэдäмäтõй олис коргиэммис степениёйс. Тäмäн мойста уравнениюа санотах ***тойзен степенин уравнениякси, или квадратнойкси.***

Непосредственнойл подстановкал убедиммоксех, что тäл уравнениял оллах юурет 9 и -1, кудамис задуачан вопросан отвиэттана вой олла вай энзимäйне юури.

Выведимма квадратнолойн уравнениёйн решиннäн общойн правилан.

120. Квадратнойн уравнениян нормальной вида. Квадратнойс уравненияс (а муга же и коргиэмман степенин уравнениёйс) он приймиттӯ, уравнениян упростиннан яльгех кай сен членат сийрдиа ӯхтел хурал пуолел, муга что уравнениян ойгиэ пуоли ройх нолян суурyокси. Муга, уравнения, луаитту предыдущойн задуачан решиндах нӓхте, озутеттух луадух членойн сийрдамизен яльгех ройх:

$$56x - 7x^2 + 63 = 0,$$

или членойн азеттамизен яльгех x-н пуолениёй степениёй муӧте:

$$-7x^2 + 56x + 63 = 0.$$

Числой -7, $+56$ и $+63$ санотах тӓмӓн квадратнойн уравнениян *коэфициентойкси:* нийс числуа $+63$ санотах *свободнойкси* членакси, а числой -7 и $+56$ *энзимӓйзекси* и *тойзекси* коэфициентойкси (мӯӧ предполагайчемма, что уравнениян членат айнос оллах азететут x-н пуолениёйн степениёйн мугах). Нӓмӓ числат войях олла и положительнолойна и отрицательнолойна и даже нолина (лайчи энзимӓйстӓ коэфициентуа, кудама эй вой олла ноля, сентях куй вастаккайзес случайс уравнения эй олис квадратной). Если ни ӯкси колмес коэфициентас эй оле ноля, силлой уравнениюа санотах *тӓӯвекси.* Тӓмӓн мойзен уравнениян (*нормальной* вида) общой вида он ненгойне:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Замиэтимма, что энзимӓйзен коэфициентан a-н мӯӧ айнос воймма луадиэ положительнойкси, мууттаен, если пидӓнӧӯ, кайккиэн членойн иэс знуакат вастаккайзикси (тойзил санойл, уравнениян молембиэн пуолиэн умножихуо -1-л). Муга, ӯлембӓнӓ туувун уравнениян мӯӧ воймма кирьюттуа ненга:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

121. Ваюалойн квадратнолойн уравнениёйн решиндӓ. Квадратнойда уравнениюа санотах *ваюакси,* конза сийт эй оле членуа x-н энзимӓйзен степенин ке, или эй оле свободнойда членуа; тойзил санойл, конза тойне коэфициента b он ноля или конза свободной члена c он О. Энзимӓйзес случайс уравниял он вида $ax^2 + c = 0$, тойзес $ax^2 + bx = 0$. (Вой даже случчиэксех, что ӯхтел айгуа и $b = 0$ и $c = 0$; силлой уравнения лиэнӧӯ $ax^2 = 0$.) Качомма кайккиэн нӓйен ваюалойн уравнениёйн решиннӓн.

1 Ваюа квадратной уравнения видуа $ax + c = 0$. Отамма колме тӓмӓн мойста примиэруа:

а) $3x^2 - 27 = 0$. Свободнойн членан сийрдахӯӧ ойгиэл пуолел, суамма $3x^2 = 27$ и, следовательно, $x^2 = 9$. Значит, x он квадратной юури 9-с, с. о. числа $+3$ или числа -3. Совимма знуакал $\sqrt{}$ обозначайя юурен арифметическойда значениюа; силлой мӯӧ воймма кирьюттуа: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Тӓмӓн мугах, аннетул уравниял он 2 решениюа. Обознуаччихуо ӯхтен нийс

x_1, а тойзен x_2, мӯӧ воймма нāмā решенният кирьюттуа ненга:

$$x_1 = +\sqrt{9} = +3, \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3.$$

б) $2x^2 - 0{,}15 = 0$. Свободнойн членан сийрдāхӯӧ, суамма:

$$2x^2 = 0{,}15 \text{ и } x^2 = 0{,}075.$$

Значит:

$$x = \pm\sqrt{0{,}075}.$$

Лӧӯвāммā $\sqrt{0{,}075}$ точностин ке, саномма, $\frac{1}{100}$ суате (§ 117):

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{0{,}07'50} = 0{,}27 \\ & \;4 \\ 47 & 35'0 \\ 7 & 32'9 \\ & \;\;21 \end{array}$$

Следовательно, $x_1 = 0{,}27 \ldots$, $x_2 = -0{,}27 \ldots$

в) $2x^2 + 50 = 0$. Сийрдāхӯӧ 50 ойгиэл пуолел, суамма:

$$2x^2 = -50; \; x^2 = -\frac{50}{2} = -25; \; x = \pm\sqrt{-25}.$$

Сентāх куй отрицательнойс числас эй суа оттуа квадратнойда юурда, то аннеттул уравнениял эй оле решениёй (вещественнолой).

Тāмāн мугах, ваюа квадратной уравнения видуа $ax^2 + c = 0$ вообще решиx ненга:

$$ax^2 = -c; \; x^2 = -\frac{c}{a}; \; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если выражения $-\frac{c}{a}$ он положительной числа (ми ройх силлой, конза числат a и c оллах эри знуаккахизет), то сийт пāй войби оттуа квадратнойн юурен (точно или приближённо), и силлой x-л суамма какси значениюа ӯхтен мойзиэн абсолютнолойн значениёйн ке, но ӯхтен положительнойн, тойзен отрицательнойн. Если же выражения $-\frac{c}{a}$ он отрицательной числа (ми ройх силлой, конза числат c и a оллах ӯхтензнуаккахизет), то уравнениял вещественнолой юуриэ эй оле.

2. Ваюа квадратной уравнения видуа $ax^2 + bx = 0$. Куй частнойн примиэрāн отамма уравнениян $2x^2 - 7x = 0$. Тāмāн уравнениян хурас пуолес отамма скобкиэн эдех множителяксн x-н:

$$x(2x - 7) = 0.$$

Нӯгӧй уравнениян хура пуоли он произведения, а ойгиэ пуоли—ноля. Но произведения он ноля вай силлой, конза миттӯйнетахто сомножителёйс он ноля; сентāх миāн уравнения удовлетворих вай силлой, конза энзимāйне сомножителя x он ноля или конза тойне сомножителя $2x-7$ он ноля (и конза, следовательно, $x=\frac{7}{2}$). Значит, аннетул уравнениял он какси решениюа:

$$x_1=0,\ x_2=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$$

Тӑмӑн мугах, ваюа квадратной уравнения видуа $ax^2+bx=0$ решиx вообще ненга:

$$ax^2+bx=0;\quad x(ax+b)=0;$$
$$x_1=0;\quad ax_2+b=0;\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

3. Ваюа квадратной уравнения видуа $ax^2=0$. Тӑмӑн мойзел уравнениял он, нӑгевӑйне, вай юури $x=0$.

Упражненият.

211. $3x^2-147=0$; $\frac{1}{3}x^2-3=0$; $x^2+25=0$.

212. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$; $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$.

213. $2x^2-7x=0$; $\frac{3}{7}x^2+x=0$; $0{,}2x^2-\frac{3}{4}x=0$.

214. $x^2=x$; $x^2-16x=0$; $7x^2=0$; $0{,}7x^2=0$.

215. $(x-2)(x-5)=0$; $x(x+4)=0$; $3(y-2)(y+3)=0$.

122. Тӑӯзиэн квадратнолойн уравнениейн решиннӑн примиэрой. Энзимӑйзекси примиэракси отамма сен квадратнойн уравнениян, кудама оли луаитту § 119 задуаччах нӑхте:

$$7x^2-56x-63=0.$$

Юамма кай сен членат 7-л и сийрӑммӑ свободнойн членан ойгиэл пуолел:

$$x^2-8x=9.$$

Азетамма нӯгӧй вопросан, эй-го суа двучленах x^2-8x лизӑтӑ мойста колматта членуа, чтобы лиэнис трехчлена, представляйччия ичес ӯннӓллистӑ квадраттуа. Мӯӧ кебиэсти вастуамма тӑх вопроссах, если изобразимма двучленан ненга:

$$x^2-2x\cdot 4.$$

Нӯгӧй он ясно, что если тӑмӑн двучленан тӑӯвеннӓммӑ членал 4^2, то суамма трехчленан:

$$x^2-2x\cdot 4+4^2,$$

кудама он разностин $x-4$-н квадратан суурус. Но если уравнениян хурах пуолех мӯӧ лизиӓммӓ числан 4^2 (с. о. 16), то и сен ойгиэх пуолех мейл пидӓӯ лизӓтӓ се же числа. Луадихуо сен, суамма:

$$x^2-8x+16=9+16,\ \text{с. о.}\ (x-4)^2=25.$$

Тăх луадух, разности $x-4$ он сен мойне числа, кудаман квадратта он 25; значит, тăмă разности должен олла ўхтен суурус куй квадратной юури 25-с, с. о. числа 5 или числа — 5:

$$x-4=+\sqrt{25}=+5, \text{ или } x-4=-\sqrt{25}=-5.$$

Членан 4 сийрдăхўб ойгиэх пуолех, суамма какси решениюа:

$$x_1=4+5=9 \text{ и } x_2=4-5=-1.$$

Молеммат нăмă решеният пăтăх аннеттух уравнениях нăхте (мих нăх вой убедиэксех проверкал), но задуаччах нăхте, кудамас пăй он выведитту уравнения, отрицательной решения -1 эй пăй, сентăх куй задуачас эчитăх скоростин абсолютнойда величинуа, а эй сен направлениюа.

Тойзекси примиэракси отамма уравнениян:

$$3x^2+15x-7=0.$$

Юамма кай членат 3-л и сийрăммă свободнойн членан ойгиэх пуолех.

$$x^2+5x=\frac{7}{3}.$$

Двучленас x^2+5x вой луадиэ сумман квадратан, если лизиăммă сих колманнен членан $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Тăмăн членан кирьюттахуо уравнениян молембих пуолих, суамма:

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{3},$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}+\frac{7}{3}=\frac{75+28}{12}=\frac{103}{12}.$$

Тăс пăй нăгўў, что $x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{103}{12}}$; следовательно:

$$x_1=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{103}{12}}; \quad x_2=-\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{103}{12}}.$$

Чётайчемма $\frac{103}{12}$ точностин ке, саномма, $\frac{1}{10}$:

$$\sqrt{\frac{103}{12}}=\sqrt{8{,}58\ldots}=2{,}9\ldots$$

Следовательно:

$$x_1=-2{,}5+2{,}9\ldots=0{,}4\ldots; \quad x_2=-2{,}5-2{,}9\ldots=-5{,}4\ldots$$

123. Приведитун квадратнойн уравнениян юуриэн формула. Квадратнойда уравнениюа, кудаман энзимăйне коэфицента он $+1$, санотах приведитукси уравнениякси. Мойзех видах, куй мўб васта вай наймммă примиэройс, уравнениян вой туувасийт случайс, конза энзимăйне коэфицента эй оле 1; максау вай уравненияn кай членат ягуа тäл коэфициентал. Общойс видас приведитту уравнения кирьютетах обыкновенно ненга:

$$x^2+px+q=0.$$

Решиммä тäмäн буквеннойн уравненияn, луадиен сен кенет же преобразованият, кудамат оли озутетту частнолойс примиэройс.

Сийрäммä свободнойн членан ойгиэх пуолех:

$$x^2+px=-q.$$

Сентäх куй $px=2x\cdot\frac{p}{2}$, то, тахтоен хурах пуолех суаха тäӱвен квадратан, лизиäммä уравненияn молембих пуолих $\left(\frac{p}{2}\right)^2$-ин:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Нӱгӧй уравненияn войби предстуавиэ ненга:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

кус пäй лӧӱвäммä:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{и} \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Тäмäн формулан войби сануо ненга:

Приведитун квадратнойн уравненияn юури он пуолен тойзен коэфициентан суурус, отетту вастаккайзен знуакан ке, плюс-минус квадратной юури тäмäн пуолнскон квадратас нлмай свободнойда членуа.

Тäмä формула пидäӱ муйстуа и буквеннойс выраженияс и сана выраженияс.

Примиэрат:

1. $x^2-x-6=0$. Чтобы тäмä уравнения луадиэ буквеннойн нäгӧйзекси, $x^2+px+q=0$, предстуавимма сен ненга:

$$x^2+(-1)x+(-6)=0.$$

Нӱгӧй нäгӱӱ, что тäс примиэрас $p=-1$ и $q=-6$; сентäх:

$$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3; \quad x_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2.$$

Проверка: $3^2-3-6=0$; $(-2)^2-(-2)-6=0$.

2. $x^2-18x+81=0$; тäс $p=-18$, $q=+81$; сентäх:

$$x=9\pm\sqrt{81-81}=9\pm0=9.$$

Уравнениял он вай ўкси юури.

3. $x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$. Юурет оллах мнимойт.

Упражнениям.

216. $x^2+10x+5=2x^2-6x+53$.

217. $x^2+6x=27$.

218. $x^2-5\frac{3}{4}x=18$.

219. $12x-\frac{6}{x}=21$.

220. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$.

221. $x+2=\frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4}-\frac{4}{5-x}=\frac{3x-1}{4}$.

223. $x+\frac{1}{x-3}=5$.

224. $\frac{2x}{x-d}=\frac{x-d}{d}$.

225. Мил t-н значениял произведения $(2t-5)(t-4)$ он сумман $t+87$ суурус.

226. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.

124. Квадратнойн уравнениян юуриэн общой формула. Уравнения $ax^2+bx+c=0$ сен членойн ягахуо a-л мууттуу приведитукси уравненияксн:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Тāмāн уравнениян решшихўб приведитун уравнениян формулуа мўбте, суамма:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}.$$

Тāмāн выражениян войби упростиэ ненга:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Тāс упроститус видас формула он полезно муйстуа; сен вой сануо ненга:

Тāўвен квадратнойн уравнениян юури он дробин суурус, кудамал числителя он тойне коэфициента, отетту вастаккайзен знуакал ке, плюс-минус квадратной юури тāмāн коэфициентан квадратас нлмай неллинкердайста энзимāйзен коэфициентан произведениюа свободнойл членал, а знаменателя он каксинкердайне энзимāйне коэфициента.

Тāдā формулуа войби нимиттиā *общойкси*, сентāх куй се пāдбў и приведиттух уравнениях нāхте (если панемма $a=1$) и вajoалойх уравнениейх нāхте (если панемма $b=0$ или $c=0$).

125. Общойн формулан упростимине, конза коэфициента

b он чётной числа. Общой формула упростих, если **b он чётной** числа. Муга, пандуо $b = 2k$, лӧӯвӑммӑ:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Тӑмӑ формула отличайчех общойс сил, что эй оле **множителёй** 4 и 2.

126. Квадратнойн уравнениян юуриэн лугу. Мӱӧ **наймма**, что квадратнойл уравнениял тойчи он 2 юурда, тойчи **ӯкси**, тойчи ни ӯхтӑ (мнимолойн юуриэн случай). Но совиттих **квадратнойл** уравнениял кайкис случайлойс приписывайя **какси юурда**, эллендӓен, что юурет войях олла тойчи **ӯхтен суурuот**, тойчи мнимойт. Тӑмӑн мойзен собимизен причинӑ **он се, что** мнимолойн юуриэн формулойл он нет же самат **свойстват, миттӯйзет** оллах вещественнолойл юурил, пидӓӯ вай, **действиёй** луадиес мнимолойн числойн ке, руководствуйяксех **правилойл**, выведиттулойл вещественнолойх юурих **нӓхте**, приймиен, **что** $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Точно муга же, конза уравнениял **он ӯкси юури**, совиттих лугиэ, что уравнениял он какси **ӯхтен суурутта** юурда.

Упражненият.

227. $2x^2 - 3x - 5 = 0$. **228.** $(2x - 3)^2 = 8x$

229. $5x^2 - 8x + 0{,}24 = 0$. **230.** $65x^2 + 118x - 55 = 0$.

231. $(x - 3)(x - 4) = 12$. **232.** $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$. **233.** $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$.

234. Лӧӯдиӑ колме последовательнойда чётнойда числуа, чтобы нийен квадратойн сумма олис 776.

235. Прямоугольникан площади он 48 *кв. см*, а сен периметра 28 *см*. Лӧӯдиӑ сторонат.

236. Лӧӯдиӑ прямоугольнойн треугольникан сторонат, если тийяммӑ, что нет выражайяхес колмел последовательнойл уннӓллизел числал.

237. Если многоугольникал он n сторонуа, то сен кайккиэн диагоналиэн лугу он $\frac{1}{2} n(n - 3)$. Определиэ, айя-го пидӓӯ олла сторонуа многоугольникал чтобы сил диагоналиэн лугу олис 54.

238 Аэроплуана ленди ойгиэда линиюа мӱӧте 450 *км*, керрал киӓндӯй ярииллех и ойгиэда линиюа мӱӧте тули лӓхтӧ пайкках суате $5\frac{1}{2}$ чуасун пройдихуо леннон заводиндас. Синне се ленди васта туулех, а снэ пӓй мӱӧдӓ туулех. Миттуйне оли тӓман туулен скорости, если иччех самолётан скорости тӯӯнел он 165 *км* чуасус?

239. Он остетту пайккуа 60 рублях. Если тӓх суммах олис остетту колмиэ пайккуа энӓмби, то ёга пайкка олис оллут 1 рублюа хуогехемби. Айя-го он остетту пайккуа?

240. Школан энзимӓйзес классас он юатту 140 листуа бумуагуа ӯхтен верройн ёга ученикал. Тойзес классас оли юатту сен же в рда листой бумуагуа и муга же ӯхтен верройн. Тӓмӓн классан ёга ученикка сай 2 листуа энӓммӓн куй энзимӓйзес классас. Айин-го листойн бумуагуа сай ёга ученикка энзимӓйзес классас, если тойзес классас оли 10 учениккуа вӓхембп, куй энзимӓйзес?

ОТВИЭТАТ УПРАЖНЕНИЕЙХ.

1. $4a$; a^2. 2. $6m^2$; m^8. 3. $x(x-d)$. 4. $10x+y$. 5. $100a+10b+c$. 6. $\frac{ma+nb}{a+b}$. 7. x^2+y^2; $(x+y)^2$; x^2y^2; $(xy)^2$; $(a+b)(a-b)$; $\frac{m+n}{m-n}$ или $(m+n):(m-n)$. 8. 84; 44; 552; 336; $9\frac{1}{3}$; $5\frac{3}{5}$. 9. $3(x+y)(x-y)$. 10. $3a+2b$; $13+12=25$. 11. $5+ab-4a$; $a+2x$. 12. n; $5a^3b^2x^3$. 13. $6xy^2$; $2ax$. 14. $5x+15$; $7x+7y+7z$. 15. $\frac{a}{2}+2b-c$; $5a^2b$. 16. $8x-2y$; $4ax$. 17. $\frac{a}{b}$; $3x$. 18. $+10$; -10; $+3$. 19. -3; $+8$; -2. 20. 0; -3; $+1$. 21. -1; -2; $+2$. 22. $+2$. 23. 0. 24. $b-a$; -5 (убытка). 25. $m-n$; -10 (велга). 26. 14; 10; 18; 2. 27. $a+b$; $m+n$; $5x$. 28. 12. 29. $-1\frac{3}{4}$. 30. $+5$. 31. $10+(-2)+(-3)+7$. 32. $10-(-8)$. 33. $+6$; -14; $+80$. 34. $-23\frac{3}{8}$; 0,054. 35. $+1$; -1; $+1$; -1. 36. 27. 37. -27. 38. 0; 0; 0; 0; 0. 39. $3\frac{1}{16}$. 40. $+5$; -5; -5; $+5$. 41. $-a$; -5; x^2. 42. 0; 0; 0; 0. 43, 44, 45 эй требуйя отвиэттуа. 46. $10a^2x^3$; $-10a^2bx^2$; $-\frac{3}{8}a^2bx^2$; $-20m^2x^2y^3$. 47. $a+a$; $ax+ax+ax$; $a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b$; $(a+1)+(a+1)+(a+1)+(a+1)$ 48. 90; $\frac{13}{15}$; $2\frac{25}{48}$; -28; -936. 49. 0; 31. -4. 50, $+1$; и -1. 51. $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$; 52. $2x-16{,}3xy$. 53. $a+3\frac{1}{2}mxy^2$. 54. $a-3\frac{1}{2}mxy^2$. 55. $4a^3-3a^2b-13ab^2$. 56. $x^5-7a^2x^2$. 57. $2x$. 58. $4x^3+x^2+3x+1$. 59. $8a^3-11a^2b+14ab^2-3b^3$. 60. p^2+p+15. 61. $4x^2+3y^2-y-1$. 62. $\frac{1}{4}x^2-x+\frac{4}{5}$. 63. $4a^2+4b^2-c^2$. 64. $x+y$; $2m-2n$. 65. $b-2c$. 66. $4x^2$. 67. $a-(b+c-d)$; $a-b+(-c+d)$; $a-(b+c)+d$. 68. $15a^3b^7c$; $\frac{5}{8}a^2x^6$. 69. $0{,}81a^3b^2x^3$; $a^6b^8c^3$. 70. $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$; $8a^9b^3x^6$. 71. $0{,}01x^2my^6$; $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. 72. $6a^3b-4ab^4+2abc$. 73 $25a^3b-20a^4b^2+15a^5b^3-35a^6b^4$. 74. $am+bm-cm-an-bn+cn$; $6a^2-3ab+2ab^2-b^3$. 75. $2a^2-\frac{1}{2}b^2$; x^3-y^3. 76. x^3+y^3. 77. $6x^2+5xy-6y^2$; y^4-1. 78. $x^6+1008x+720$. 79. $x^9-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1$. 80. x^6-a^6. 81. a^2+2a+1; $1+4a+4a^2$; $x^2+x+\frac{1}{4}$. 82. $9a^4+6a^2+1$; $0{,}01m^2x^2+mx^3+25x^4$. 83. $25a^2-20a+4$; $9x^2-12ax+4a^2$; $9a^4-3a^2+\frac{1}{4}$. 84. $101^2=(100+1)^2=100^2+2\cdot100\cdot1+1^2=10\,201$; $997^2=(1000-3)^2=\ldots=994\,009$ и м. и. 85. $4m^2-12mn+9n^2$; $9a^4x^2-24a^3xy+16a^2y^2$; $0{,}04x^6-0{,}15x^3+\frac{9}{64}$. 86. $\frac{1}{4}x^4-3\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{4}x^2$; $0{,}0625p^2-0{,}1pq+0{,}04q^2$. 87. a^2-1; $4a^2-25$. 88. $4x^2-9$; $1-a^4$. 89. $(x^2+1)(x^2-1)=x^4-1$; $(4x^2+y^2)(4x^2-y^2)=16x^4-y^4$ 90. $[(m+n)-p][(m+n)+p]=(m+n)^2-p^2$; $a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$. 91. a^3+3a^2+3a+1; a^3-3a^2+3a-1; $8x^3+36x^2+54x+27$; $125+225x+135x^2+27x^3$. 92. $\frac{1}{8}m^3-\frac{3}{2}m^2+6m-8$; $\frac{27}{64}p^3+\frac{9}{16}p^2q+\frac{1}{4}pq^2+\frac{1}{27}q^3$; $125-225x+135x^2-$

$-27x^3$. **93.** $2a^2xy; -\frac{3}{5}x^2$. **94.** $-\frac{6}{5}a^3; 3a^{m-1}b^2$. **95.** $\frac{16}{3}a+8b-16a^2b^4$. **96.** $9x^2-6ax+a^2$.
97. $1-2y+y^2-y^3$. **98.** $x-4$; $y+1$. **99.** $3x^2-2$. **100.** $3ax^3$. **101.** $x-a$.
102. $2(a+x)$; $a(x+y)$; $2y(2y-3x)$. **103.** $2a(2x-y)$; $3xy(2x+3y)$.
104. $3ab(4a-3ab+2b^2)$; $xy(y-7+4x)$. **105.** $(m+n)(m-n)$; $(a+1)(a-1)$; $(1+a)(1-a)$. **106.** $(x+2)(x-2)$; $(m+3)(m-3)$; $(2x+y)(2x-y)$.
107. $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$; $(0,1a^3+3)(0,1a^3-3)$; $(3a(a^2+4b^4)(a+2b^2)(a-2b^2)$.
108. $(x-y+a)(x-y-a)$; $[3(a+2b)+1][3(a+2b)-1]$; $(a+b+c)(a-b-c)$.
109. $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy$; $4(x-y)(3x+y)$. **110.** $(x-y)^2$; $(m+n)^2$.
111. $(a+b)^2$; $(a-2b)^2$. **112.** $(x+4)^2$; $(x+1)^2$. **113.** $5a(a-2b)^2$. **114.** $(a+b)^2-c^2=$ $=(a+b+c)(a+b-c)$; $a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-$
115. $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$; $a(c-b)+b(d-c)=a(c-d)-$ $-b(c-d)=(c-d)(a-b)$. **116.** $a(a+b)-(a+b)=(a+b)(a-1)$; $xz+$ $+xy-3y-3z=x(y+z)-3(y+z)=(y+z)(x-3)$. **117.** $4mn-2nx+xy-$ $-2my=2n(2m-x)+y(x-2m)=2n(2m-x)-y(2m-x)=(2m-x)(2n-y)$; $(2a-3)(2a-3)(2a+3)$. **118.** $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{10m}$; $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{25m}{59n}$. **119.** $\frac{9ab}{10x^2}$; $\frac{14a^3}{15b}$; $\frac{12x-1}{4a-4b}$. **120.** $\frac{17(a+b)}{34}=\frac{a+b}{2}$; $\frac{2(9a-7)}{6-a}$. **121.** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$; $\frac{x^2+ax-b}{x^2-}$.
122. $\frac{x-1}{x}$; $\frac{3a^2}{b-a}$; $\frac{a-1}{b-2}$. **123.** $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$; $\frac{m^2-1}{m-1}$. **124.** $-\frac{3a}{6}$; $-\frac{5x^2}{3}$; $-\frac{a-1}{b}$; $-\frac{a}{x-2}$; $-\frac{m^2-n^2}{m-n}$. **125.** $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3m}$; $\frac{2a}{3b}$; $\frac{3xy}{8}$. **126.** $\frac{3b}{2x}$; $\frac{ac}{4b}$; $\frac{16axy^3}{15}$. **127.** $\frac{b}{a+b}$; $\frac{3y}{x-y}$; $\frac{a+2}{a-2}$. **128.** $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{1}{x+3}$; $\frac{a}{a-1}$. **129.** $\frac{x-1}{2x(x+1)}$; $\frac{a+x}{3b-cx}$; $\frac{5a}{a-x}$. **130.** $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$. **131.** $\frac{18}{6a}$; $\frac{4a}{6a}$; $\frac{4x^2}{12xy}$; $\frac{3y^2}{12xy}$; $\frac{x^2}{4x}$; $\frac{16}{4x}$. **132.** $\frac{4bc}{2abc}$, $\frac{6ac}{2abc}$, $\frac{ab}{2abc}$; $\frac{105b^2x^2}{60a^2b^2x}$; $\frac{40a^2x}{60a^2b^2x}$, $\frac{48a^2b^4}{60a^2b^2x}$. **133.** $\frac{20mx^3y^2}{12a^2bcmx^2y}$, $\frac{9a^3b^2c}{12a^2bcmx^2y}$; $\frac{2a^2bx}{8a^3b^2}$, $\frac{y}{8a^3b^2}$. **134.** $\frac{15x^3}{40abx^3}$, $\frac{120abx^4}{40abx^3}$, $\frac{8a^2b}{40abx^3}$. **135.** $\frac{3(x+y)^2}{6(x^2+y^2)}$, $\frac{2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$; $\frac{m-1}{m^2-1}$, $\frac{2}{m^2-1}$, $\frac{3(m+1)}{m-1}$. **136.** $\frac{2}{(x-1)^2}$, $\frac{3a(x-1)}{(x-1)^2}$, $\frac{2x-1}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{2(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$. **137.** $\frac{3x}{84a^3b^2}$, $\frac{4aby}{84a^3b^2}$; $\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{2ab(a+b)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{b}{b(a^2-b^2)}$. **138.** $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$; $\frac{6+5x}{3x^2}$; $\frac{2a-2x-5}{4}$.
139. $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$. **140.** $\frac{1+x}{2}$; $\frac{5x-6}{3}$; $\frac{5-2x}{3}$. **141.** $\frac{1}{1-4x^2}$.
142. $\frac{2a^2b-ab-2b^2-a^2}{a(a+b)(a-b)}$. **143.** $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$. **144.** $\frac{6b}{7x^2}$; $\frac{1}{5(1+a)x}$.
145 $\frac{12p^2q^2x^2y^2}{n^4a^3}$; $2a(x-1)$. **146.** $\frac{a(a+2b)}{b^2}$; $\frac{9b^2c^2x^2}{16a^2z^2}$. **147.** $\frac{3a^3}{5mp}$; $15a^2x^2y$. **148.** $\frac{1}{5(a-b)}$; $\frac{x+y}{x-y}$. **149.** Равенстват 3-с 4-с и 6-с оллах уравненият, досталит — тождестват. **150.** 17; 5, 5. **151.** 27; 9; 12. **152.** 3; 2; $\frac{13}{20}$.
153. 2,7; 50. **154.** 9; −3; −4. **155.** 1; $5\frac{3}{7}$. **156.** $2\frac{6}{11}$. **157.** $7\frac{1}{13}$. **158.** 2.
159. $-17\frac{25}{27}$. **160.** 1348 и 1200. **161.** 20, 30, 50. **162.** $2\frac{1}{2}$. **163.** 12,8 *кг* и

19,2 *кг*. **164**. 15 *км* и 18 *км*. **165**. 0. **166**. $\frac{c}{2(a-b)}$. **167**. $\frac{4-4a}{b-3}$.
168. $h=\frac{2q}{b_1+b_2}$. **169**. $x=2,\ y=1;\ x=1,\ y=-2;\ x=-3,\ y=-3.$
170. $x=-\frac{1}{2},\ y=1;\ x=5,\ y=1,\ x=7,\ y=2.$ **171**. $x=\frac{35}{13}, y=-\frac{23}{13}$.
172. $x=\frac{c}{a+bm},\ y=\frac{mc}{a+bm}; x=\frac{a+bm}{mn-1}, y=\frac{an+b}{mn-1}$. **173**. $a=3,\ b=\cdot\ 5.$
174. 1 р. 10 коп. и 40 коп. **175**. 40 и 25. **176**. 200; 11 *км*. **177**. $1\frac{2}{3}$ *м*, $13\frac{1}{3}$ *м* и $9\frac{2}{3}$ *м*, $9\frac{1}{3}$*м* **178**. $x=2,\ y=3,\ z=5.$ **179**. $x=3\frac{1}{2},\ y=2\frac{1}{4}\ z=4.$
180. $x=4,\ y=0,\ z=5.$ **181**. $x=51,\ y=76,\ z=1.$ **182**. $x=8,\ y=10,\ z=5.$
183. $x=36,\ y=6.$ **184**. $x=2,\ y=4,\ z=1,\ u=5.$ **185**. $x=6,\ y=12,\ z=8.$
186. Лизäттӱӧ 2-н уравнениян 3-н ке, суамма $2x=32,\ x=16.$ Пуолендахуо 1-с уравненияс 2-н, суамма: $2z=11;\ z=5^1/_2$. Яльгимäй пуолен дахуо 1-с уравненияс 3-н, лӧӱвäммä; $2y=15^1/_2;\ y=7^3/_4$. **187**. $1\frac{7}{8}$ руб.; $\frac{1}{2}$ руб ; 5 руб. **188**. 133; 150; 76, **189**. $\pm 10;\ \pm 0{,}1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{4};\ \pm a;\ \pm x.$ **190**. 5; 27; a; $1+x$. **191**. $+3;\ -3;\ +\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\ -0{,}1.$ **192**. $\pm 2; \pm\frac{1}{2};\ \pm 3;$ мнимойт числат.
193. $\pm 6;\ \pm 0{,}25,\ \pm 2ab;\ \pm 3axy^2.$ **194**. $-3ab;\ \pm\frac{1}{2}ax;\ \sqrt[5]{a}\ \sqrt[5]{b}\ \sqrt[5]{c}.$
185. $\pm a^2\ \pm 2^2\ \pm x^3;\ \pm(a+b)^2.$ **196**. $2^2;\ -a^2;\ x^3;\ (m+n)^2.$ **197**. $\frac{2}{5}\ -\frac{3}{10};\ \frac{a^2}{b};$ $\sqrt[3]{\frac{x}{y}};\pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ **198**. $\pm 5a^3bc^2;\ \pm 0{,}6x^2y;\ \pm\frac{1}{2}(b+c)^3x^2.$ **199**. 17; 65; 247; 763.

200. 368; 978; 7563. **201**. 8276; 20 548. **202**. 534 762. **203**. Ӱннäллизен числан квадратан яльгимäйне числа должен олла ӱхтенä нийс числойс, кудамих лоппиэтахес энзимäйзен 10-н чпслан квадратат; 0, 1, 2, 3, . . ., 9. Но ни ӱкси нäйс квадратойс эй лоппей ни 2-л, ни 3-л, ни 7-л ни 8-л. **204**. 3; 3,6; 3,606. **205**. 10,05; 0,89. **206**. 0,09; 4,37. **207**. 19; 18,9; 18,89. **208**. 0,77; 0,65; 0,79; 0,65; 0,17.

209. $\frac{1}{5}\sqrt{15}=\frac{387}{500}\left(\text{точн. }\frac{1}{500}\right);$ $\frac{1}{7}\sqrt{21}=\frac{458}{700}\left(\text{точн. }\frac{1}{700}\right);$
$\frac{1}{11}\sqrt{77}=\frac{877}{1100}\left(\text{точн. }\frac{1}{1100}\right);$ $\frac{1}{12}\sqrt{60}=\frac{774}{1200}\left(\text{точн. }\frac{1}{1200}\right);$
$\frac{1}{250}\sqrt{1750}=\frac{4183}{25000}\left(\text{точн. }\frac{1}{25000}\right)$. **210**. 0,5; 2,4, 1,52; 0,05. **211**. $\pm 7;\ \pm 3;$ $\pm\sqrt{-25}.$ **212**. $\pm 9;\ \pm 9.$ **213**. 0 и $3\frac{1}{2}$; 0 и $-2\frac{1}{3}$; 0 и 3,75. **214**. 0 и 1; 0 и 16; 0; 0. **215**. 2 и 5; 0 и -4; 2 и -3. **216**. 12 и 4. **217**. 3 и -9.
218. 8 и $-2\frac{1}{4}$. **219**. 2 и $-\frac{1}{4}$. **220**. 44 и -2. **221**. 1 и -5. **222**. 6 и -3.
223. 4. **224**. $d(2\pm\sqrt{3})$. **225**. $t_1=6;\ t_2=1.$ **226**. $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$. **227**. $2\frac{1}{2}$ и -1.
228. $4\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. **229**. $\backsimeq 1{,}5694$ и $\backsimeq 0{,}0306$. **230**. $\frac{5}{13}$и $-\frac{11}{5}$. **231**. 7 и 0. **232**. 14 и -10. **233**. a и $\frac{1}{a}$. **234**. 14, 16, 18 и -18, -16, -14. **235**. 6 и 8. **236**. 3, 4, 5.
237. 12. **238**. 15 *км* чуас, **239**. 12. Классан, кудамас оли 40 учениккуа, ӧга ученикка сай 6-ин листойн.

ОГЛАВЛЕНИЯ.

Отв. редактор Ф. А. Чуккоев   Тех. редактор А. А. Николаев.

Уполн. Главлита Карельской АССР № В-981.   Каргосиздат № 98.   Заказ № 1287.
$8^1/_8$ печатных л., 8,5 авторских л. Кол. зн. в печ. л. 50000. Тираж 2500. Формат бумаги 60×$92^1/_{16}$
Сдано в набор 22/V-39 г.   Подписано к печати 11/VII-39 г.

Гос. тип. им. Анохина, Петрозаводск, Пушкинская, 7.

ОПЕЧАТКАТ.

Стр.	Строчка.	Он печатойду	Пидäӱ олла
28	5 ӱлäхäн пäй	лизäтт	лизäттäвäн
—	6 ӱлäхäн пäй	т	тойне
53	12 алахан пäй	$+$ в	$+ в^2$
83	6 алахан пäй	общолойн	общолойх
119	2 ӱлäхäн пäй	x^2	x_2

Зак. № 1287. Тир 2500

ХИНДА 1 руб. 10 коп.

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

для неполной средней и средней школы

(на карельском языке)